TS1

Devoir pour le 3-11-2014

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ ainsi que par les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, a_n et b_n sont des entiers naturels.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

3°) Calculer $a_n{}^2 - 2b_n{}^2$.

4°) En déduire que pour tout entier naturel *n*, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.

Corrigé du DM pour le 3-11-2014

1°) **Démontrer que pour tout entier naturel n, a_n et b_n sont des entiers naturels.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ ».

Vérifions $P(0)$ est vraie.
Par hypothèse $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
1 et 0 sont des entiers naturels donc $P(0)$ est vraie.

Considérons un entier naturel k tel que $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $a_k \in \mathbb{N}$ et $b_k \in \mathbb{N}$.
Démontrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $a_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $b_{k+1} \in \mathbb{N}$.

On a $a_{k+1} = a_k + 2b_k$.
Comme $b_k \in \mathbb{N}$, $2b_k$ est un entier naturel et comme de plus, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_k + 2b_k$ est un entier naturel (la somme de deux entiers naturels est un entier naturel).
Donc a_{k+1} est un entier naturel

De même, $b_{k+1} = a_k + b_k$.
Or a_k et b_k sont des entiers naturels.
Donc b_{k+1} est un entier naturel.

D'après le principe de démonstration par récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

2°) **Démontrons que pour tout entier naturel n, on a : $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P'(n)$: « $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ ».

Vérifions $P'(0)$ est vraie.
On a : $\left(1+\sqrt{2}\right)^0 = 1$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^0 = 1$
Or par hypothèse, on a : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
Donc on peut écrire $\left(1+\sqrt{2}\right)^0 = a_0 + b_0\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^0 = a_0 - b_0\sqrt{2}$.

La proposition $P'(0)$ est donc vraie.

Considérons un entier naturel k tel que $P'(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\left(1+\sqrt{2}\right)^k = a_k + b_k\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^k = a_k - b_k\sqrt{2}$.
Démontrons qu'alors $P'(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(1+\sqrt{2}\right)^{k}\\ &= \left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(a_k+b_k\sqrt{2}\right)\\ &= a_k+2b_k+\left(a_k+b_k\right)\sqrt{2}\\ &= a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(1-\sqrt{2}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)^{k}\\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)\times\left(a_k-b_k\sqrt{2}\right)\\ &= a_k+2b_k-\left(a_k+b_k\right)\sqrt{2}\\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}\end{aligned}$$

D’après le principe de démonstration par récurrence, la propriété $P'(n)$ est donc vraie quelque soit $n\in\mathbb{N}$.

3°) **Calculons $a_n{}^2-2b_n{}^2$.**

$$\begin{aligned}a_n{}^2-2b_n{}^2 &= \left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n-b_n\sqrt{2}\right)\\ &= \left(1+\sqrt{2}\right)^n\times\left(1-\sqrt{2}\right)^n\\ &= \left[\left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)\right]^n\\ &= (1-2)^n\\ &= (-1)^n\end{aligned}$$

4°) **Déduisons-en que pour tout entier naturel n, il existe un entier $p\geqslant 1$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$.**

D’après la question 2) on a $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ donc on peut écrire $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{a_n^2}+\sqrt{2b_n^2}$.

1er cas : n est pair
Dans ce cas, la relation établie au 3°) donne : $a_n^2-2b_n^2=1$.
Posons $p=a_n^2$.
p est un entier naturel et on a $p-1=a_n^2-1=2b_n^2$.
Donc $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$

2e cas : n est impair

Dans ce cas, la relation établie au 3°) donne : $a_n^2-2b_n^2=-1$.
Posons $p=b_n^2$.
p est un entier naturel et on a $p-1=2b_n^2=a_n{}^2$.
Donc $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$.

En réunissant les deux cas, on a démontré que pour tout entier naturel n, il existe un entier $p\geqslant 1$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$.