$1^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du vendredi 10 octobre 2014 (30 min)

Prénom : …………………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. …………………………………………………………………………………………………….... 2 points

On pose $A=\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{8}}$ et $B=\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

Calculer A et B (on effectuera les calculs au brouillon et on donnera chaque résultat sous la forme la plus simple possible sans radical au dénominateur).

A = ... B = ...

II. ………………………………………………………………………………………………….... 5 points

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer l'image de $-\sqrt{2}$ par *f*. Répondre sans justifier.

$f\left(-\sqrt{2}\right)=$.................

2°) Déterminer par le calcul le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 2 et de – 1 par *f*. Répondre sans justifier en rédigeant une phrase dans chaque cas.

………...

………...

………...

………...

3°) En partant de *x*, on souhaite donner l'ordre dans lequel on effectue les opérations pour calculer $f(x)$.

Compléter le programme de calcul correspondant à la fonction *f* :

- On part de *x*.
- On calcule x^2.
- On …………………………….
- On …………………………….
- On obtient $f(x)$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$, $v : x \mapsto x^2$, $w : x \mapsto x+1$.
Cocher à l'aide de ce qui précède la proposition convenable.

☐ *f* est l'enchaînement de *u* suivie de *v* suivie de *w*.

☐ *f* est l'enchaînement de *u* suivie de *w* suivie de *v*.

☐ *f* est l'enchaînement de *v* suivie de *u* suivie de *w*.

☐ *f* est l'enchaînement de *v* suivie de *w* suivie de *u*.

☐ *f* est l'enchaînement de *w* suivie de *u* suivie de *v*.

☐ *f* est l'enchaînement de *w* suivie de *v* suivie de *u*.

III. ……………………………………………………………………………………………….. 4 points

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de *x* pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible. Rédiger la recherche sur le modèle suivant (« chaîne d'équivalences ») et conclure par une égalité d'ensembles : $\mathcal{D}=\ldots\ldots$ en utilisant les notations adéquates.

$f(x)$ existe si et seulement si …………………………………………………………………….

si et seulement si …………………………………………………………………….

si et seulement si …………………………………………………………………….

si et seulement si …………………………………………………………………….

$\mathcal{D}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

IV. ……. 7 points

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » et Δ_a la droite d'équation $y = ax$ où a est un réel.

1°) Compléter sans justifier par « strictement au-dessus » ou « strictement au-dessous » la phrase suivante précisant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ_1 sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

La courbe $\mathscr{C}$ est ………………………………………………………………………………… Δ_1 sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}+1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Compléter les phrases du raisonnement suivant par « strictement croissante » ou « strictement décroissante » permettant de déterminer le sens de variation de *f* sur l'intervalle $I = \left]0\,;+\infty\right[$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est ……………………………………………………….. sur *I*.

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est ……………………………………………………….. sur *I*.

On en déduit que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}+1$ est ……………………………………………………….. sur *I*.

3°) On note $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction *g* dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On admet que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en unique point $\mathrm{A}\left(x_0\,;\,y_0\right)$.

a) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0 est égale à …………………… .

b) Compléter à l'aide de la calculatrice les phrases suivantes donnant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle I (l'intervalle I a été défini à la question 2°)).

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle ……………… .
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle ……………… .
- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécantes au point d'abscisse x_0.

4°) **Bonus :**

Lorsque a est strictement positif, la droite Δ_a coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point O et en un autre point noté K.

Ainsi, on peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathscr{C} \cap \Delta_a = \{\mathrm{O}, \mathrm{K}\}$.

Calculer les coordonnées de K en fonction de a.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

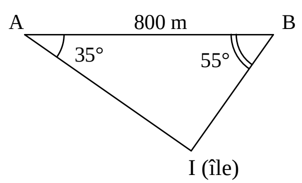
………

………

V. …….. 2 points

Deux bateaux sont au large d'une île et souhaitent la rejoindre pour y passer la nuit. On peut schématiser leurs positions A et B comme indiquées ci-dessous. Ils constatent qu'ils sont séparés de 800 m, et chacun voit l'île sous un angle différent.

Déterminer la distance qui sépare chaque bateau de l'île.



Ne rien écrire sur la figure.

AI = ... m (« expression exacte »)   BI = ... m (« expression exacte »)

AI ≈ .... m (valeur arrondie à l'unité)   BI ≈ .... m (valeur arrondie à l'unité)

Corrigé du contrôle du 10-10-2014

I.

On pose $A=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$ et $B=\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

Calculer A et B (on effectuera les calculs au brouillon et on donnera chaque résultat sous la forme la plus simple possible sans radical au dénominateur).

$$A=\frac{5\sqrt{2}}{4} \qquad B=\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$$

Justification :

$$\begin{aligned}
A&=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}\\
&=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}}\\
&=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\
&=\frac{5\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$B=\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\times\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\times\left(3+\sqrt{5}\right)} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\times\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$$

La petite calculatrice de collège verte Casio fx-92 permet d'obtenir ces résultats directement !

II.

On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer l'image de $-\sqrt{2}$ par *f*. Répondre sans justifier.

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}$$

La petite calculatrice de collège verte Casio fx-92 permet d'obtenir ces résultats directement !

2°) Déterminer par le calcul le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 2 et de – 1 par *f*. Répondre sans justifier en rédigeant une phrase dans chaque cas.

Les antécédents de 2 par f sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

– 1 n'a pas d'antécédent par *f*.

Justifications :

● Pour les antécédents de 2 par *f* :

On résout l'équation $f(x)=2$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$\sqrt{x^2+1}=2$

$x^2+1=4$ (on élève au carré les deux membres ; les deux membres sont positifs ou nuls donc il y a bien équivalence avec l'équation précédente)

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

● Pour les antécédents de – 1 :

La fonction *f* est à valeurs positives ou nulles (le résultat d'une racine carrée étant toujours positive).

3°) En partant de *x*, on souhaite donner l'ordre dans lequel on effectue les opérations pour calculer $f(x)$.

Compléter le programme de calcul correspondant à la fonction *f* :

● On part de *x*.

● On calcule x^2.

● On ajoute 1.

● On calcule la racine carrée du résultat.

● On obtient $f(x)$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$, $v : x \mapsto x^2$, $w : x \mapsto x+1$.
Cocher à l'aide de ce qui précède la proposition convenable.

☐ f est l'enchaînement de u suivie de v suivie de w.

☐ f est l'enchaînement de u suivie de w suivie de v.

☐ f est l'enchaînement de v suivie de u suivie de w.

☒ f est l'enchaînement de v suivie de w suivie de u.

☐ f est l'enchaînement de w suivie de u suivie de v.

☐ f est l'enchaînement de w suivie de v suivie de u.

III.

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x}$ c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible. Rédiger la recherche sur le modèle suivant (« chaîne d'équivalences ») et conclure par une égalité d'ensembles : $\mathcal{D} = \ldots\ldots$ en utilisant les notations adéquates.

$f(x)$ existe si et seulement si le dénominateur est non nul

si et seulement si $x^2 - 4x \neq 0$

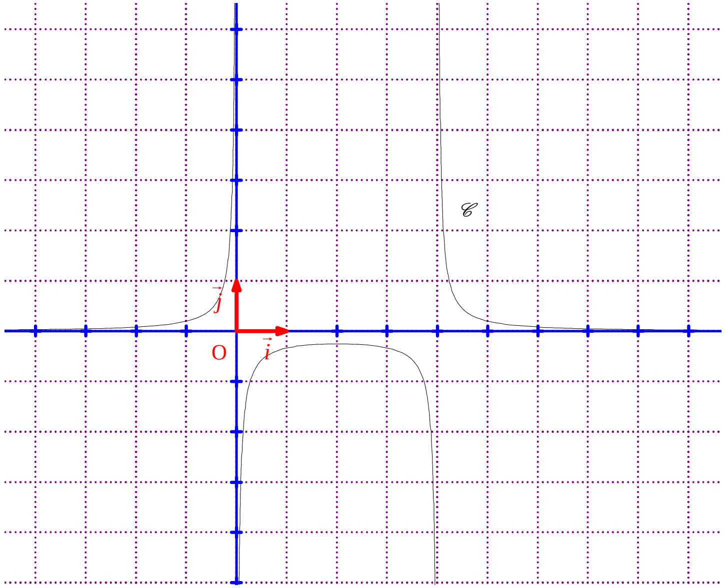
si et seulement si $x(x-4) \neq 0$

si et seulement si $x \neq 0$ $\boxed{\text{et}}$ $x - 4 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 0$ $\boxed{\text{et}}$ $x \neq 4$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,;4\}$$

On retrouve graphiquement ce résultat en traçant la courbe de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.



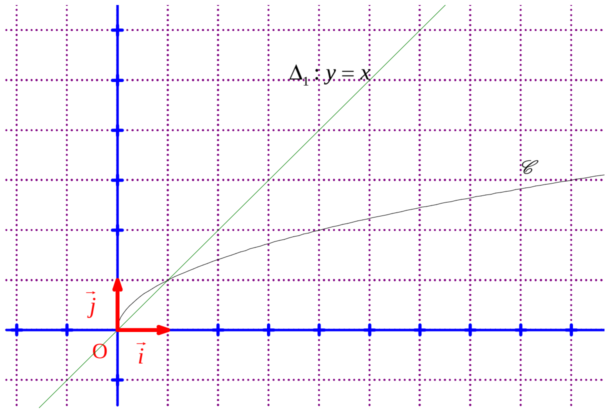
IV.

Le plan est muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » et Δ_a la droite d'équation $y = ax$ où a est un réel.

1°) Compléter sans justifier par « strictement au-dessus » ou « strictement au-dessous » la phrase suivante précisant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ_1 sur l'intervalle $]0\,;1[$.

La courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de Δ_1 sur l'intervalle $]0\,;1[$.



2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}+1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Compléter les phrases du raisonnement suivant par « strictement croissante » ou « strictement décroissante » permettant de déterminer le sens de variation de *f* sur l'intervalle $I = \left]0\,;+\infty\right[$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur *I*.

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur *I*.

On en déduit que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}+1$ est strictement décroissante sur *I*.

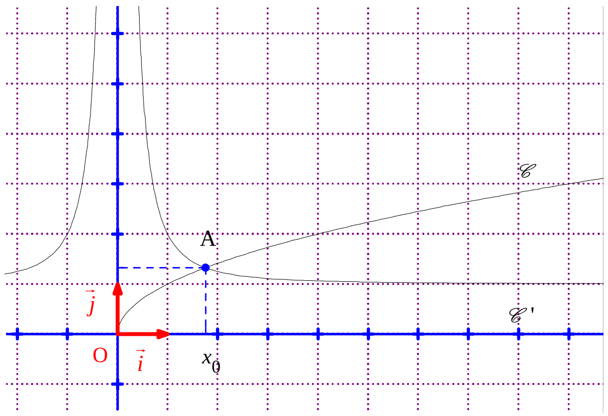
On vérifie ce résultat graphiquement en traçant la représentation graphique de *g* sur l'écran de la calculatrice.

3°) On note $\mathscr{C}\,'$ la courbe représentative de la fonction *g* dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On admet que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$ se coupent en unique point $\mathrm{A}\left(x_0\,;y_0\right)$.

a) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0 est égale à 1,754.



Sur calculatrice TI, avec la commande d'intersection de deux courbes, on obtient l'affichage au bas de l'écran :

$\mathrm{X} = 1{,}7548777$
$\mathrm{Y} = 1{,}324718$

On a donc $1{,}754 \leqslant x_0 < 1{,}755$.

b) Compléter à l'aide de la calculatrice les phrases suivantes donnant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle *I* (l'intervalle *I* a été défini à la question 2°)).

On n'a pas la valeur exacte de x_0 et il n'est pas possible de la trouver. Aussi est-on obligé d'utiliser x_0 et non une valeur approchée.

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle $\left]x_0\,;+\infty\right[$.
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle $\left]0\,;x_0\right[$.
- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$ sont sécantes au point d'abscisse x_0.

4°) **Bonus :**

Lorsque *a* est strictement positif, la droite Δ_a coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point O et en un autre point noté K.
Ainsi, on peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathscr{C} \cap \Delta_a = \left\{\mathrm{O}, \mathrm{K}\right\}$.
Calculer les coordonnées de K en fonction de *a*.

On résout l'équation $\sqrt{x} = ax \quad (1)$.

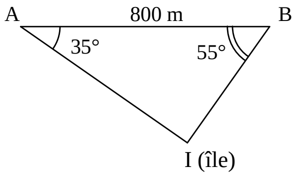
Le domaine de résolution est $\mathbb{R}_+$.
(1) est successivement équivalente à :

$\sqrt{x} - ax = 0$
$\sqrt{x} - a\sqrt{x} \times \sqrt{x} = 0$
$\sqrt{x}\left(1 - a\sqrt{x}\right) = 0$
$\sqrt{x} = 0$ ou $1 - a\sqrt{x} = 0$
$x = 0$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{1}{a}$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{a^2}$

K a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{K}} = \dfrac{1}{a^2} \\ y_{\mathrm{K}} = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{a} \end{array} \right.$.

V.

Deux bateaux sont au large d'une île et souhaitent la rejoindre pour y passer la nuit. On peut schématiser leurs positions A et B comme indiquées ci-dessous. Ils constatent qu'ils sont séparés de 800 m, et chacun voit l'île sous un angle différent.
Déterminer la distance qui sépare chaque bateau de l'île.



Ne rien écrire sur la figure.

$AI = 800 \times \sin 55°$ m (« expression exacte ») $BI = 800 \times \cos 55°$ m (« expression exacte »)

$AI \approx 655$ m (valeur arrondie à l'unité) $BI \approx 459$ m (valeur arrondie à l'unité)

On calcule $\widehat{AIB} = 90°$ donc le triangle AIB est rectangle en I.