TS1

Devoir pour le 15-10-2014

I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{i}z = \overline{z}$ (E).

II. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$ et $B_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

1°) Calculer A_n et B_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Que peut-on conjecturer ?

2°) **Question facultative**

Démontrer la conjecture.

Corrigé du DM pour le 15-10-2014

I. Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z = \overline{z}$ (E).

Il s'agit de la résolution d'une équation. On attend un raisonnement par équivalence.

On pose $z = x + \mathrm{i}y \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On a alors : $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

$$
\begin{aligned}
\text{(E)} &\Leftrightarrow \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y \\
&\Leftrightarrow \mathrm{i}x - y = x - \mathrm{i}y \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y = x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow y = -x
\end{aligned}
$$

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \{x - \mathrm{i}x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Autre manière de conclure :

Les solutions de (E) sont les nombres complexes de la forme $x - \mathrm{i}x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

II.

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

$$B_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1°)

Calculons A_n et B_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (2+1)(2+2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= (3+1)(3+2)(3+3) \\ &= 4\times5\times6 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= (4+1)(4+2)(4+3)(4+4) \\ &= 5\times6\times7\times8 \\ &= 1680 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= (5+1)(5+2)(5+3)(4+4) \\ &= 6\times7\times8\times9\times10 \\ &= 30240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 2^1\times(2-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= 2^2\times(2-1)\times(2\times2-1) \\ &= 4\times3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= 2^3\times(2\times2-1)\times(2\times3-1) \\ &= 8\times3\times5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= 2^4\times(2\times2-1)\times(2\times3-1)\times(2\times4-1) \\ &= 16\times3\times5\times7 \\ &= 1680 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 &= 2^5\times(2\times2-1)\times(2\times3-1)\times(2\times4-1)\times(2\times5-1) \\ &= 32\times3\times5\times7\times9 \\ &= 30240 \end{aligned}$$

Formulons une conjecture.

Le résultats précédents nous permettent de conjecturer que $A_n = B_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) **Question facultative**

Démontrons que $A_n = B_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Il y a deux méthodes : récurrence ou factorielles.

1ère méthode : démonstration par récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$: « $A_n = B_n$ ».

● Vérifions que la phrase $P(1)$ est vraie.
On a $A_1 = 2$ et $B_1 = 2$ donc on peut écrire $A_1 = B_1$.
La phrase $P(1)$ est donc vraie.

● Considérons un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que la phrase $P(p)$ soit vraie c'est-à-dire $A_p = B_p$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire $A_{p+1} = B_{p+1}$.

$$\begin{aligned}
A_{p+1} &= \prod_{k=1}^{p+1} (p+1+k) \\
&= (p+1+1)\times(p+1+2)\times\ldots\times(p+1+p)(p+1+p+1) \\
&= (p+1+1)\times(p+1+2)\times\ldots\times(p+1+p-1)(p+1+p)(p+1+p+1) \\
&= (p+2)\times(p+3)\times\ldots\times(p+p)(p+p+1)\boxed{(2p+2)} \\
&= \boxed{2(p+1)}(p+2)\times(p+3)\times\ldots\times(p+p)(p+p+1) \\
&= 2\boxed{(p+1)(p+2)\times(p+3)\times\ldots\times(p+p)}(2p+1) \\
&= 2\times A_p \times (2p+1)
\end{aligned}$$

Or $A_p = B_p$ par hypothèse de récurrence c'est-à-dire $A_p = 2^p \prod_{k=1}^{p} (2k-1)$.

Donc $A_{p+1} = 2\times 2^p \left(\prod_{k=1}^{p} (2k-1) \right) \times (2p+1)$ soit $A_{p+1} = 2^{p+1} \left(\prod_{k=1}^{p} (2k-1) \right) \times (2(p+1)-1)$.

On en déduit que $A_{p+1} = 2^{p+1} \prod_{k=1}^{p+1} (2k-1)$ et par suite , $A_{p+1} = B_{p+1}$.

On a donc démontré que la phrase $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de démonstration par récurrence, la phrase $P(n)$ est donc vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2[e] méthode : démonstration directe en utilisant les factorielles

$$\begin{aligned}
A_n &= \prod_{k=1}^{n} (n+k) \\
&= (n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(n+n) \\
&= \frac{1\times2\times3\times\ldots\times n\times(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(n+n)}{1\times2\times3\times\ldots\times n} \quad \text{(on multiplie numérateur et dénominateur par } n\text{ !)} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \frac{1\times2\times3\times4\times\ldots\times(2n-1)\times(2n)}{n!} \\
&= 2\times4\times\ldots\times(2n)\times\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{n!} \\
&= (1\times2)\times(2\times2)\times\ldots\times(2\times n)\times\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{n!} \\
&= 2^n\times(1\times2\times\ldots\times n)\times\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{n!} \\
&= 2^n\times\cancel{n!}\times\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{\cancel{n!}} \\
&= 2^n\times1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)
\end{aligned}$$

Or $B_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Donc $A_n = B_n$.