1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 17 octobre 2014 (50 min)

Prénom : ……………………………….…. **Nom :** …………………………...…..

Note : …. / 20

I. (5 points)

On pose $\mathrm{A}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, $\mathrm{B}=\sqrt{8}-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{C}=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}-\sqrt{15}$, $\mathrm{D}=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{18}}$, $\mathrm{E}=1-\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)$.

Calculer ces expressions (donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible sans radical au dénominateur ; détailler ci-dessous le calcul de A et B).

A = ………………… B = ………………… C = ………………… D = ………………… E = …………………

………

………

………

………

………

II. (2 points)

On pose $P(x)=x^2-(m+1)x-2m$ où m est un réel donné.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de m sous forme développée réduite (calculs au brouillon).

$\Delta=$ ………………………………………………… (un seul résultat)

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3-\left(x^2+1\right)(2x-5)$.

Démontrer que f est une fonction polynôme du second degré.

………

………

………

IV. (12 points : 3 points par question)

On considère le polynôme $P(x)=x^2+x-2$.

1°) Donner sans justifier les racines de $P(x)$.

Les racines de $P(x)$ sont ……………………………………………….. .

2°) Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	

3°) On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$.

Déduire des questions précédentes les ensembles de définition respectifs **D** et **D'** de f et g c'est-à-dire les ensembles des valeurs de x pour lesquelles les calculs de $f(x)$ et de $g(x)$ sont possibles.

Rédiger la recherche sur le modèle suivant (« chaîne d'équivalences ») et conclure par une égalité d'ensembles : **D** = …… et **D'** = …… en utilisant les notations adéquates.
Vérifier graphiquement en traçant les courbes représentatives de f et g sur calculatrice graphique.

$f(x)$ existe si et seulement si …………………………………………………………………….

si et seulement si …………………………………………………………………….

D = ………..

$g(x)$ existe si et seulement si …………………………………………………………………….

si et seulement si …………………………………………………………………….

D' = ………..

V. (4 points)

On considère le polynôme $P(x)=2x^2+x-3$.

1°) Donner sans justifier les racines de $P(x)$.

Les racines de $P(x)$ sont ……………………………………………….. .

2°) En déduire une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

$P(x)=$.. (une seule égalité)

VI. (4 points)

On cherche deux réels dont la somme vaut 4 et le produit vaut 1.
Former une équation du second degré à une inconnue dont les solutions sont les nombres cherchés.
Résoudre cette équation au brouillon et en déduire les nombres cherchés.

Les nombre cherchés sont les solutions de l'équation ………………………………………………… .

Après résolution, on en déduit que les nombres cherchés sont : ……………………………………………..

VII. (3 points)

Compléter sans justifier les phrases suivantes :

- Lorsque x décrit l'intervalle $[-3\,;2]$, x^2 décrit l'intervalle ………………….. .
- Lorsque x décrit l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x}$ décrit l'intervalle ………………….. .
- Lorsque x décrit l'intervalle $[-3\,;-1]$, $|x|$ décrit l'intervalle ………………….. .

VIII. (3 points)

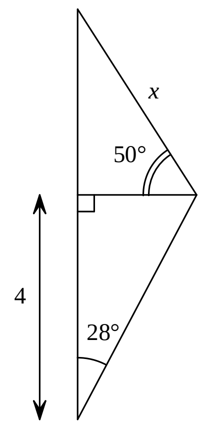
On considère la fonction $f : x \mapsto 1-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer les antécédents par f de – 3, 1, 2. Faire une phrase dans chaque cas.

- …..…………………………………………………………………………………………………
- …..…………………………………………………………………………………………………
- …..…………………………………………………………………………………………………

IX. (4 points)

On considère la figure ci-dessous (il est demandé de ne rien écrire dessus).
Calculer x.



$x=$.. (« expression exacte »)

$x\approx$................... (valeur arrondie au dixième)

Corrigé du contrôle du 17-10-2014

I. (5 points)

On pose $A=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, $B=\sqrt{8}-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$, $C=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}-\sqrt{15}$, $D=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{18}}$, $E=1-\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)$.

Calculer ces expressions (donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible sans radical au dénominateur ; détailler ci-dessous le calcul de A et B).

$A=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ $\quad B=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\quad C=4$ $\quad D=\dfrac{16}{3}$ $\quad E=3-3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}A&=\frac{2\sqrt{5}\times\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\times\left(\sqrt{5}+1\right)}\\&=\frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2-1^2}\\&=\frac{10+2\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{\cancel{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}{\cancel{2}\times 2}\\&=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

(on est obligé de factoriser avant de simplifier)

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{8}-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\\&=\sqrt{8}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}+\sqrt{6}\times\sqrt{2}\\&=2\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\\&=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{4-\sqrt{15}}-\sqrt{15}\\&=\frac{1\times\left(4+\sqrt{15}\right)}{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}-\sqrt{15}\\&=\frac{4+\sqrt{15}}{1}-\sqrt{15}\\&=4+\sqrt{15}-\sqrt{15}\\&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{18}}\\&=\frac{2^3\times\sqrt{2}^3}{3\sqrt{2}}\\&=\frac{8\times\sqrt{2}^2\times\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}}\\&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E&=1-\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)\\&=1-3\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\\&=1-3\sqrt{2}+2\\&=3-3\sqrt{2}\end{aligned}$$

II. (2 points)

On pose $P(x)=x^2-(m+1)x-2m$ où m est un réel donné.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de m sous forme développée réduite (calculs au brouillon).

$\Delta=m^2+10m+1$ (un seul résultat)

$a=1 \quad b=-(m+1) \quad c=-2m$

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[-(m+1)\right]^2-4\times1\times(-2m)\\&=(m+1)^2+8m\\&=m^2+10m+1\end{aligned}$$

III. (3 points)

On considère la fonction $f: x\mapsto 2x^3-\left(x^2+1\right)(2x-5)$.

Démontrer que f est une fonction polynôme du second degré.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)&=2x^3-\left(x^2+1\right)(2x-5)\\&=2x^3-\left(2x^3-5x^2+2x-5\right)\\&=5x^2-2x+5\end{aligned}$$

IV. (12 points)

On considère le polynôme $P(x)=x^2+x-2$.

1°) Donner sans justifier les racines de $P(x)$.

Les racines de $P(x)$ sont 1 et – 2.

2°) Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3°) On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$.

Déduire des questions précédentes les ensembles de définition respectifs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D'}$ de *f* et *g* c'est-à-dire les ensembles des valeurs de *x* pour lesquelles les calculs de $f(x)$ et de $g(x)$ sont possibles.

Rédiger la recherche sur le modèle suivant (« chaîne d'équivalences ») et conclure par une égalité d'ensembles :
$\mathbf{D}=\ldots\ldots$ et $\mathbf{D'}=\ldots\ldots$ en utilisant les notations adéquates.
Vérifier graphiquement en traçant les courbes représentatives de *f* et *g* sur calculatrice graphique.

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+x-2\neq 0$

si et seulement si $x\neq 1$ $\boxed{\text{et}}$ $x\neq -2$

$$\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\}$$

$g(x)$ existe si et seulement si $x^2+x-2\geqslant 0$

si et seulement si $x\leqslant -2$ $\boxed{\text{ou}}$ $x\geqslant 1$

$$\mathbf{D'}=\left]-\infty\,;-2\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[$$

On remarquera l'emploi des conjonctions de coordination (connecteurs logiques) « ou » et « et ».

V. (4 points)

On considère le polynôme $P(x)=2x^2+x-3$.

1°) Donner sans justifier les racines de $P(x)$.

Les racines de $P(x)$ sont 1 et $-\dfrac{3}{2}$.

2°) En déduire une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

$$P(x)=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) \text{ (une seule égalité)}$$
$$P(x)=(x-1)(2x+3)$$

VI. (4 points)

On cherche deux réels dont la somme vaut 4 et le produit vaut 1.
Former une équation du second degré à une inconnue dont les solutions sont les nombres cherchés.
Résoudre cette équation au brouillon et en déduire les nombres cherchés.

Les nombre cherchés sont les solutions de l'équation $x^2-4x+1=0$.

Après résolution, on en déduit que les nombres cherchés sont : $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

Une équation est une égalité. Elle comporte donc toujours le signe =.

On résout l'équation $x^2-4x+1=0$ en utilisant le discriminant réduit.

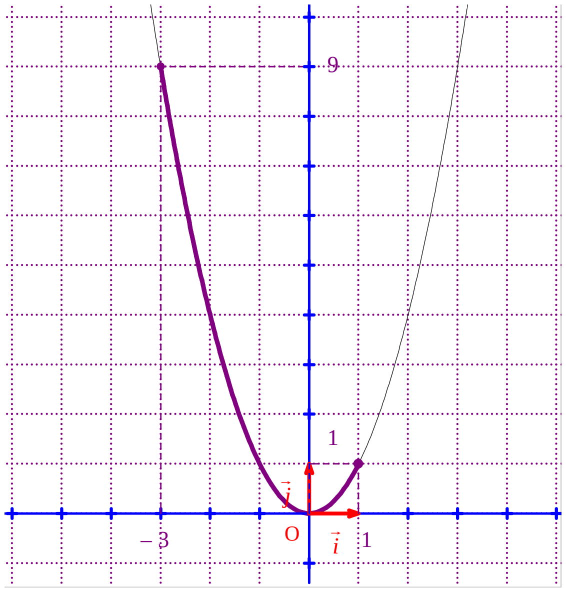
VII. (3 points)

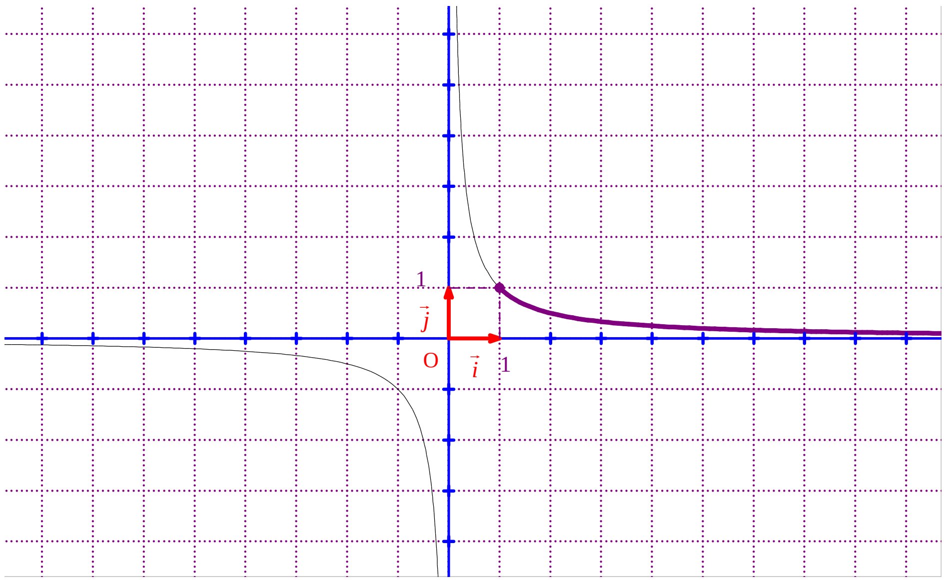
Compléter sans justifier les phrases suivantes :

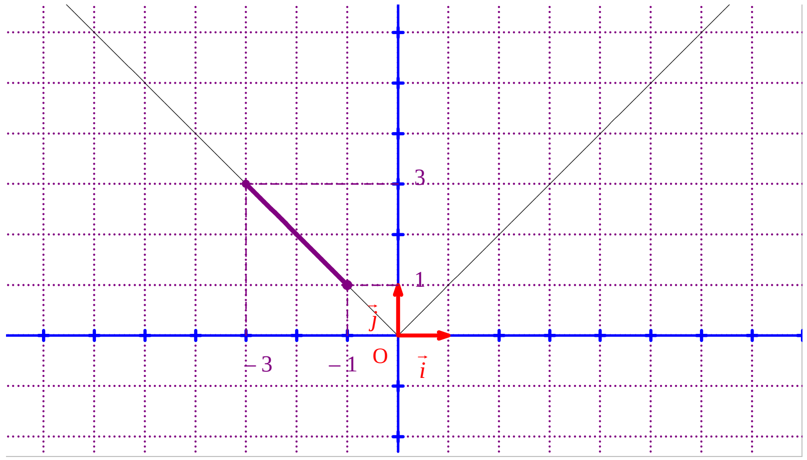
- Lorsque *x* décrit l'intervalle $[-3\,;2]$, x^2 décrit l'intervalle $[0\,;9]$.
- Lorsque *x* décrit l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, $\dfrac{1}{x}$ décrit l'intervalle $\left]0\,;1\right]$.
- Lorsque *x* décrit l'intervalle $[-3\,;-1]$, $|x|$ décrit l'intervalle $[1\,;3]$.

On raisonne graphiquement.
On s'appuie sur les représentations graphiques des fonctions « carré », « inverse », « valeur absolue ».

On vérifie tous ces résultats graphiquement.







VIII. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer les antécédents par *f* de – 3, 1, 2. Faire une phrase dans chaque cas.

• L'antécédent de – 3 par *f* est 4.

• L'antécédent de 1 par *f* est 0.

• 2 n'a pas d'antécédent par *f*.

Pour les antécédents de – 3, on résout l'équation $f\left(x\right)=-3$ (1).
(1) est successivement équivalente à :

$1-2\sqrt{x}=-3$

$-2\sqrt{x}=-4$

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

Pour les antécédents de 1, on résout l'équation $f\left(x\right)=1$ (2).
(2) est successivement équivalente à :

$1-2\sqrt{x}=1$

$-2\sqrt{x}=0$

$\sqrt{x}=0$

$x=0$

Pour les antécédents de 2, on résout l'équation $f\left(x\right)=2$ (3).
(3) est successivement équivalente à :

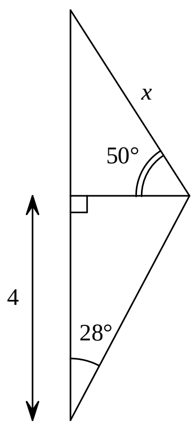
$1-2\sqrt{x}=2$

$\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ (impossible car le résultat d'une racine carrée n'est jamais négatif)

Aucune solution

IX. (4 points)

On considère la figure ci-dessous (il est demandé de ne rien écrire dessus).
Calculer *x*.



$x=\dfrac{4\tan 28°}{\cos 50°}$ (« expression exacte »)

$x\approx 3{,}3$ (valeur arrondie au dixième)

On note *y* la longueur du segment horizontal.
On a : $y=4\times\tan 28°$.

D'autre part $\cos 50°=\dfrac{y}{x}$ d'où $x=\dfrac{y}{\cos 50°}$.

On en déduit que $x=\dfrac{4\tan 28°}{\cos 50°}$.

Avec la calculatrice, on obtient : $x=3{,}30877212...$.