Trigonométrie dans un triangle rectangle

→ Définitions

ABC est un triangle rectangle en C.

On s'intéresse à l'angle $\widehat{A}$.

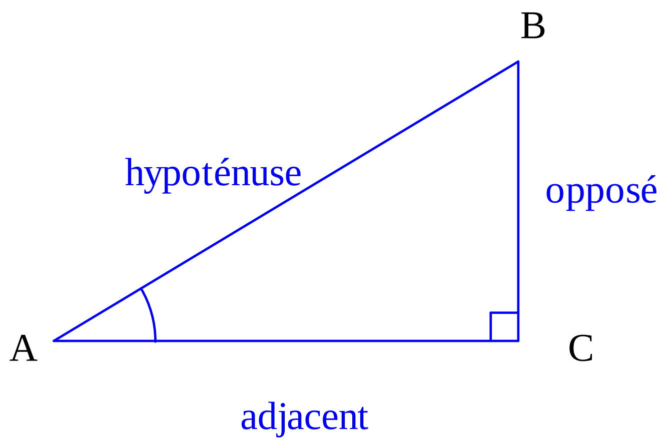
Le côté **opposé** à l'angle $\widehat{A}$ est $[BC]$.

Le côté **adjacent** à l'angle $\widehat{A}$ est $[AC]$.

$$\cos\widehat{A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{BC}{BA}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{BC}{AC}$$

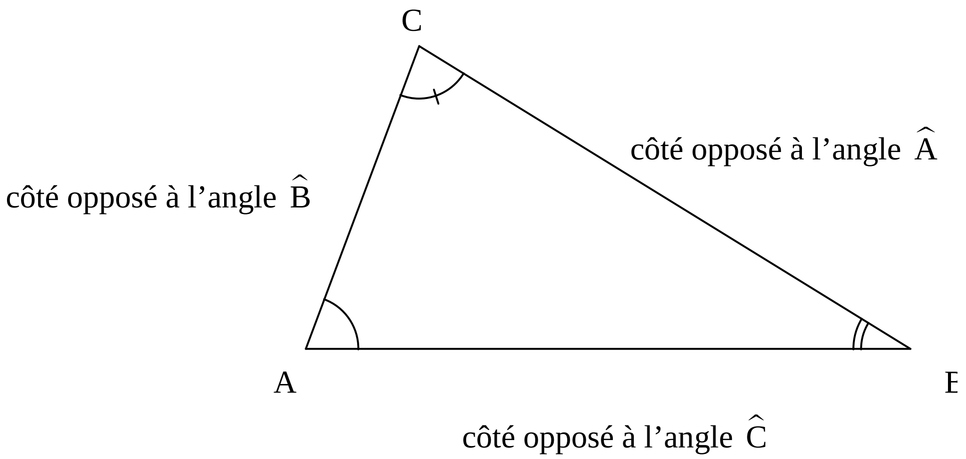


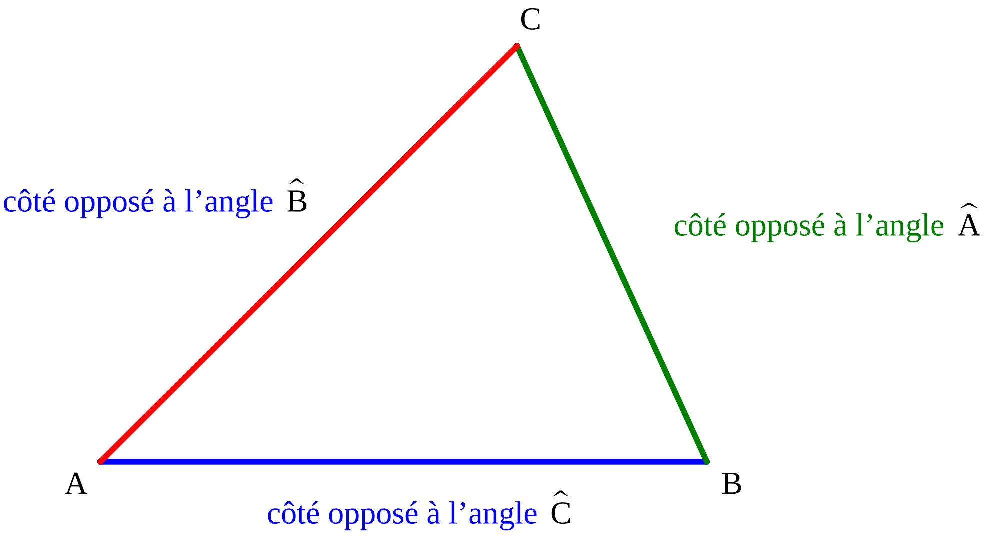
On retient ces formules grâce au moyen mnémotechnique suivant : « SOH CAH TOA » où H désigne l'hypoténuse, O le côté opposé et A le côté adjacent (la lettre A n'a évidemment aucun rapport avec le nom du sommet du triangle).
L'ordre est donné par O/H (« opposé sur hypoténuse »), A/H (« adjacent sur hypoténuse »), O/A (« opposé sur adjacent »)

L'analyse dimensionnelle montre que $\cos\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}$, $\tan\widehat{A}$ sont des nombres sans unité.
En effet, chacun est défini comme quotient de deux longueurs.

Vocabulaire :

- **côté opposé** à un angle dans un triangle quelconque





- **côté adjacent** à un angle aigu dans un triangle rectangle

Le mot adjacent vient du latin *ad jacere*.

Dans le langage courant, on emploie les expressions « rue adjacente », « garage adjacent à la maison »…
L’adjectif adjacent signifie « dans le voisinage immédiat ».
adjectif

→ Propriétés (démonstrations très faciles)

① $\mathbf{0 < \cos \widehat{A} < 1}$ et $\mathbf{0 < \sin \widehat{A} < 1}$

② $\mathbf{\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1}$ (relation fondamentale)

Les notations $\cos^2 \widehat{A}$ et $\sin^2 \widehat{A}$ remplacent $\left(\cos \widehat{A}\right)^2$ et $\left(\sin \widehat{A}\right)^2$.

La démonstration est très facile et utilise le théorème de Pythagore.

$$\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$$

$$= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{BA^2}$$

$$= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2}$$

$$= \frac{CA^2 + CB^2}{AB^2}$$

$$= \frac{AB^2}{AB^2}$$ (utilisation du théorème de Pythagore car le triangle ABC rectangle en C)

$$= 1$$

③ $\mathbf{\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}}$

④ $\mathbf{1 + \tan^2 \widehat{A} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}}$

$\mathbf{1 + \frac{1}{\tan^2 \widehat{A}} = \frac{1}{\sin^2 \widehat{A}}}$

Démonstration :

On part de la relation $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$. En divisant les deux membres par $\cos^2 \widehat{A}$ (qui est non nul), on obtient $\frac{\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A}}{\cos^2 \widehat{A}} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}$ ce qui donne $\frac{\cos^2 \widehat{A}}{\cos^2 \widehat{A}} + \frac{\sin^2 \widehat{A}}{\cos^2 \widehat{A}} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}$ soit $1 + \left(\frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}$.

On obtient finalement $1 + \tan^2 \widehat{A} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{A}}$.

La deuxième relation s'obtient de la même manière en divisant les deux membres de la relation $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$ par $\sin^2 \widehat{A}$.

⑤ $\mathbf{\cos \widehat{A} = \sin \widehat{B}}$

$\mathbf{\sin \widehat{A} = \cos \widehat{B}}$

→ Quand deux angles sont complémentaires (c'est-à-dire dire la somme des mesures en degrés est égale à 90), le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et inversement.

$\mathbf{\tan \widehat{A} = \frac{1}{\tan \widehat{B}}}$

→ Quand deux angles sont complémentaires, la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre.

→ Valeurs remarquables (à savoir par cœur)

x	30	45	60
$\cos x°$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin x°$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x°$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- Il y a un moyen mnémotechnique pour retenir ce tableau.
- La calculatrice TI-83 Premium CE donne directement les valeurs exactes des lignes trigonométriques de 30°, 45°, 60° qui s'expriment à l'aide de racines carrées.

→ Utilisation de la calculatrice de lycée TI 83-CE Premium

La plupart des élèves, au moment où ils ont étudié la trigonométrie dans le triangle rectangle, ont utilisé au collège la calculatrice Casio fx-92.
Il est important au lycée de savoir utiliser en trigonométrie un modèle plus évolué de calculatrice.

En dehors des valeurs remarquables, on est obligé d'utiliser la calculatrice.

Méthode :

On doit d'abord choisir le mode degré ou radian.

$\boxed{\text{mode}}$ 3$^{\text{e}}$ ligne : RADIAN DEGRÉ

Sur la calculatrice, taper sur la touche $\boxed{\text{trig}}$ pour accéder à :

1 : sin	4 : $\sin^{-1}$
2 : cos	5 : $\cos^{-1}$
3 : tan	6 : $\tan^{-1}$

Déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu de mesure donnée.

Méthode :

On doit d'abord choisir le mode degré ou radian.

On utilise la touche $\boxed{\text{trig}}$ puis on sélectionne cos, sin, tan suivant les besoins.

Exemple :

Calculer à l'aide de la calculatrice sin 57°.

Solution :

On choisit le mode degré.

On appuie sur la touche $\boxed{\text{trig}}$ puis on sélectionne sin.
On tape l'expression de sorte qu'à l'écran soit affiché : sin(57   (l'unité n'apparaît pas)

On appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient l'affichage : 0.8386705679 .

$\sin 57° = 0{,}838670567...$

Déterminer un angle aigu dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente.

Méthode :

On doit d'abord choisir le mode degré ou radian.

On utilise la touche $\boxed{\text{trig}}$ puis on sélectionne $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ suivant les besoins.

Exemple :

Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dont le sinus vaut 0,4.

Solution :

On choisit le mode degré.

On appuie sur la touche $\boxed{\text{trig}}$ puis on sélectionne $\sin^{-1}$.
On fait en sorte qu'à l'écran soit affiché $\sin^{-1}(0.4$.

Il s'agit d'une écriture mathématique que nous n'utiliserons pas à l'écrit.

On appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient l'affichage : 23,57817848.

Notons α la mesure en degrés d'un angle aigu dont le sinus vaut 0,4 ($\sin \alpha° = 0{,}4$).

On a : $\alpha = 23{,}5781784...$.

Cas de mesures en radians pour certaines valeurs remarquables

Sur la calculatrice, si on tape :

$\cos^{-1}(0.5)$, on obtient 1,047197551 (valeur approchée)

$\cos^{-1}(1/2)$, on obtient $\frac{\pi}{3}$ (valeur exacte)

La calculatrice préfère les fractions.

→ Applications

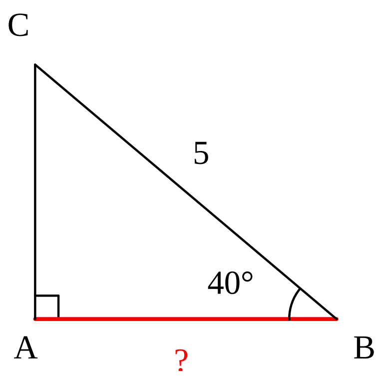
● Exemple 1 (calculer une longueur)

Version sans unité :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 5$ et $\widehat{B} = 40°$.

Calculer la longueur AB (valeur arrondie au dixième).

Solution :



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : $\cos\widehat{B} = \frac{BA}{BC}$.

Donc $\cos 40° = \frac{BA}{5}$.

D'où $BA = 5 \times \cos 40°$ (valeur exacte) [on privilégie cette écriture par rapport à $BA = \cos 40° \times 5$].

Avec la calculatrice (mise en mode degré), on trouve : $BA = 3{,}83022221...$.

Donc $BA \approx 3{,}8$ (valeur arrondie au dixième).

Attention à ne pas écrire un $=$ à la place du $\approx$. Il ne faut pas écrire $BA = 3{,}8$.

Remarque :

Comme 40° n'est pas une valeur remarquable, on est obligé d'utiliser la calculatrice.

Version avec unité

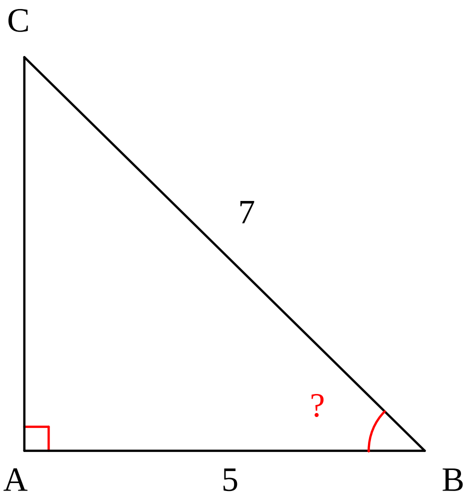
● Exemple 2 (calculer un angle)

Version sans unité :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $BC = 7$.

Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{B}$ (valeur arrondie au dixième).

Solution :



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : $\cos\widehat{B} = \dfrac{BA}{BC}$.

Donc $\cos\widehat{B} = \dfrac{5}{7}$.

Grâce à la calculatrice (mise en mode degré, avec l'affichage $\cos^{-1}(5/7$ pour la calculatrice TI-83 Premium CE), on obtient : $\widehat{B} = 44,415308\ldots°$.

Donc $\widehat{B} \approx 44,4°$ (valeur arrondie au dixième).

Attention à ne pas écrire un $=$ à la place du $\approx$. Il ne faut pas écrire $\widehat{B} = 44,4°$.

Remarque :

Comme $\dfrac{5}{7}$ n'est pas une valeur remarquable, on est obligé d'utiliser la calculatrice.

Point méthode :

Pour savoir si on choisit le cosinus, le sinus ou la tangente, on se réfère aux données et on utilise la « règle » SOH-CAH-TOA.

Version avec unité

Appendice 1 : démonstration des lignes trigonométriques de 45° et 60°

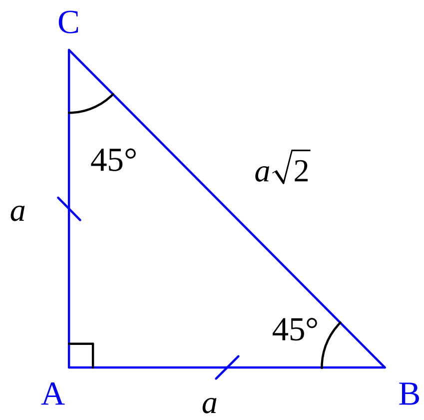
Angle de 45°

ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

On pose $a = \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$.

On sait que les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ mesurent tous deux 45°.

On a : $\mathrm{BC} = a\sqrt{2}$ (application du théorème de Pythagore).



$$\cos 45° = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{a}{a} = 1$$

Angle de 60°

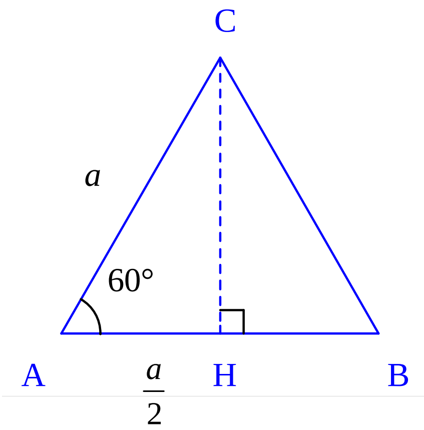
ABC est un triangle équilatéral de coté *a*.

On sait que tous les angles mesurent 60°.

On note H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Comme ABC est équilatéral, H est le milieu de [AB].

On a : $\mathrm{CH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté *a*).



$$\cos 60° = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Appendice 2 : tableau des valeurs remarquables en radians

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Lecture du tableau :

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Appendice 3 : quelques remarques d'écriture

Exemple de calcul :

$$\text{AB}=4\times\cos 60°=4\times\frac{1}{2}=2$$
$$\text{AB}=4\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$$

On écrit l'unité lorsqu'il s'agit de degrés.

On ne met pas de parenthèses après cos, sin, tan même si celles-ci apparaissent sur l'écran de calculatrice lorsque l'on tape les expressions.

On écrit le nombre avant le cosinus, le sinus ou la tangente ($4\times\cos 60°$ et non $\cos 60°\times 4$).

On écrit cos, sin, tan en écriture attachée en minuscules (et non en majuscules COS, SIN, TAN).

On retiendra :
- pas de majuscules ;
- pas d'écriture détachée.

Appendice 4 : usage des petits points

Exemple :

Affichage obtenu sur calculatrice TI-83 à l'aide la touche π :

$$\underbrace{3,14159265}_{\text{décimales exactes}}4$$

décimale incertaine (soit 3 soit 4 car obtenue par arrondi automatique)

On peut écrire : $\pi = 3,14159265...$ (on n'a pas écrit la dernière décimale affichée).

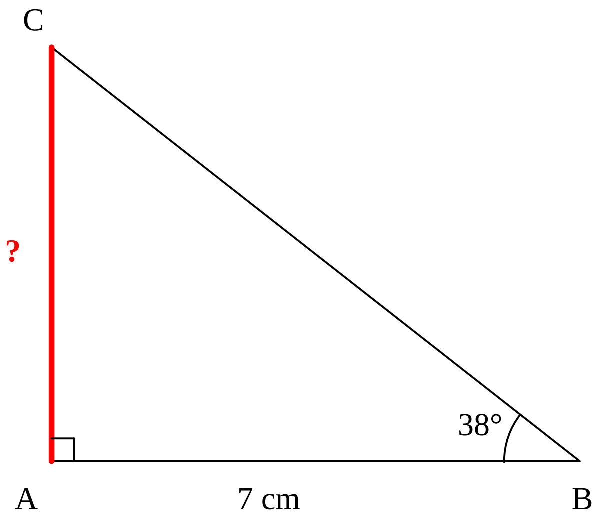
On peut tout aussi bien écrire $\pi = 3,1415...$ suivant les besoins.

Exercices

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 7$ cm et $\widehat{ABC} = 38°$.
Calculer les longueurs AC et BC (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).

Solution :

On commence par faire une figure codée (en marquant l'angle droit) sans respecter les mesures.



● Calcul de AC :

On a : $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Donc $\tan 38° = \dfrac{AC}{7}$

D'où $AC = 7 \times \tan 38°$ (valeur exacte).

Avec la calculatrice, on trouve $AC = 5,46899938...$ cm.

Donc $AC \approx 5,5$ cm (valeur arrondie au dixième).

On peut éventuellement rédiger en français la conclusion sous la forme.

La valeur arrondie au dixième de la longueur AC en cm est égale à 5,5.

● Calcul de BC :

On a : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$.

Donc $\cos 38° = \dfrac{7}{BC}$.

D'où $BC = \dfrac{7}{\cos 38°}$ (valeur exacte).

Avec la calculatrice, on trouve $BC = 8,88312750...$ cm.

Donc $BC \approx 8{,}8$ cm (valeur arrondie au dixième).

Autre manière en incorporant les unités dans les calculs :

● Calcul de AC :

On a $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Donc $\tan 38° = \dfrac{AC}{7 \text{ cm}}$

D'où $AC = (7 \text{ cm}) \times \tan 38°$ ou $AC = 7 \times \tan 38°$ cm (valeur exacte).

Avec la calculatrice, on trouve $AC = 5{,}46899938...$ cm .

Donc $AC \approx 5{,}5$ cm (valeur arrondie au dixième).

● Calcul de BC :

On a $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$.

Donc $\cos 38° = \dfrac{7 \text{ cm}}{BC}$.

D'où $BC = \dfrac{7 \text{ cm}}{\cos 38°}$ ou $BC = \dfrac{7}{\cos 38°}$ cm (valeur exacte).

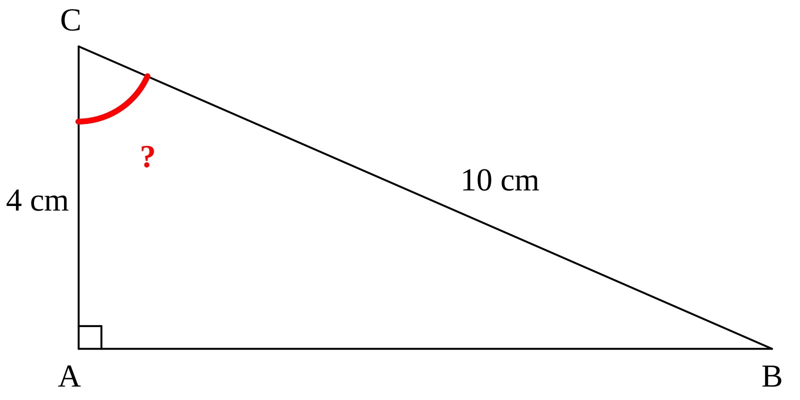
Avec la calculatrice, on trouve $BC = 8{,}88312750...$ cm .

Donc $BC \approx 8{,}9$ cm (valeur arrondie au dixième).

$\boxed{\textbf{2}}$ Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 4$ cm et $BC = 10$ cm.
Calculer la valeur arrondie à l'unité de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$.

Solution :

On commence par faire une figure codée (en marquant l'angle droit).



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : $\widehat{ACB} = \dfrac{CA}{CB}$.

Donc on a : $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

D'après la calculatrice, on a : $\widehat{ACB} = 66,4218215...°$ [on n'écrit jamais $\widehat{ACB} = \cos^{-1} \dfrac{2}{5}$; on pourrait écrire à la rigueur $\widehat{ACB} = \text{Arccos}\dfrac{2}{5}$ si l'on cherche la mesure en radians].

Attention, à ne pas écrire : $\cos \widehat{ACB} = 66,4218215...°$.

Donc $\widehat{ACB} \approx 66°$ (valeur arrondie à l'unité).

On ne peut écrire de français relatif à un membre d'une égalité : on écrit $\widehat{ACB} \approx 66°$ et non l'angle $\widehat{ACB} \approx 66°$.