$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 19 septembre 2014 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (6 points)

Soit ABC un triangle. On considère les points U et V tels que $\overrightarrow{AU}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CV}=-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que B est le milieu du segment [UV]. Aucune figure n'est demandée.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (4 points)

Soit E, F, G trois points quelconques du plan. On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{EF}-2\overrightarrow{EG}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GF}\right)$.

Démontrer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il est demandé de ne pas transformer l'expression de $\vec{u}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (6 points : 3 points + 3 points)

Dans cet exercice, on demande de donner les résultats sans détailler la démarche.
On effectuera la recherche au brouillon.

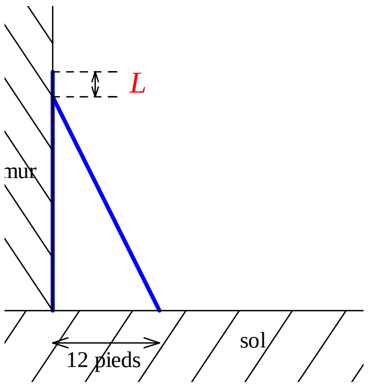
Les deux questions se réfèrent à la même situation mais sont indépendantes l'une de l'autre.

Il est demandé de ne rien noter sur les figures.

À Pise vers 1200 après J.-C. (problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge).

1°) Une lance, longue de 20 pieds*, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol (voir schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle).

Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?
On notera L cette longueur en pieds.

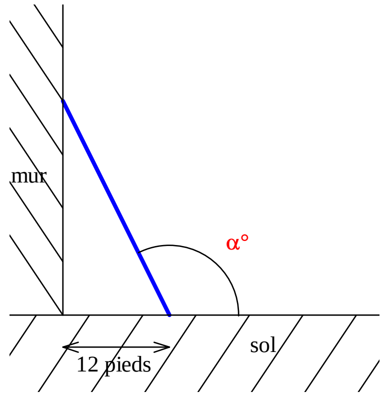


* Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ 30 cm.

$L =$ ....

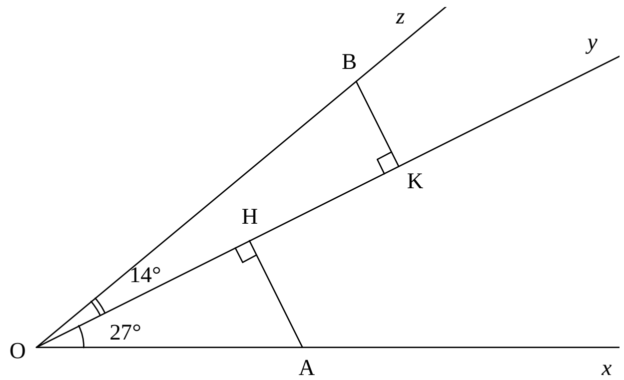
2°) Dans le cas où l'extrémité de la lance est écartée de 12 pieds par rapport au mur, on note α la mesure en degrés de l'angle obtus formé par la lance et le sol.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de α. Aucune justification n'est demandée.

$\alpha \approx$ .... (valeur arrondie au dixième)



IV. (4 points : 3 points + 1 point)

On considère trois demi-droites [Ox), [Oy), [Oz) de même origine O, formant entre elles deux angles adjacents $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ mesurant respectivement 27° et 14°.
Soit A le point de [Ox) tel que $OA = 5$ et B est le point [Oz) tel que $OB = 7$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite (Oy).
La figure ci-dessous ne respecte pas les mesures données.
Calculer HK (valeur exacte puis valeur arrondie au centième).
Aucun détail de la démarche n'est demandé. On effectuera la recherche au brouillon.
Il est demandé de rien écrire sur la figure.



HK = ... (valeur exacte)

HK ≈ .... (valeur arrondie au centième)

Corrigé du contrôle du 19-9-2014

I.

Soit ABC un triangle. On considère les points U et V tels que $\overrightarrow{AU}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CV}=-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que B est le milieu du segment [UV]. Aucune figure n'est demandée sur la copie.

Cet exercice met en œuvre la compétence principale suivante : « établir une démarche pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment ».

Outil principal : calcul vectoriel

Les compétences mises en œuvre lors de la résolution sont :
- utiliser une égalité vectorielle ;
- décomposer un vecteur.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BU}+\overrightarrow{BV}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CV}\\&=\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BU}+\overrightarrow{BV}=\vec{0}$.

On en déduit que B est le milieu du segment [UV].

II.

Soit E, F, G trois points quelconques du plan. On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{EF}-2\overrightarrow{EG}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GF}\right)$.

Démontrer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il est demandé de ne pas transformer l'expression de $\vec{u}$.

Cet exercice met en œuvre la compétence principale suivante : « établir une démarche pour démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ».

Outil principal : calcul vectoriel

Les compétences mises en œuvre lors de la résolution sont :
- utiliser la relation de Chasles ;
- décomposer un vecteur ;
- exprimer un vecteur en fonction d'un autre.

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GF}\right)\\&=\overrightarrow{FG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\\&=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\\&=\frac{3}{2}\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}\\&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}\end{aligned}$$

On constate que $\vec{u}=-2\vec{v}$ (cette égalité est absolument essentielle pour conclure).
On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III.

Dans cet exercice, on demande de donner les résultats sans détailler la démarche.
On effectuera la recherche au brouillon.

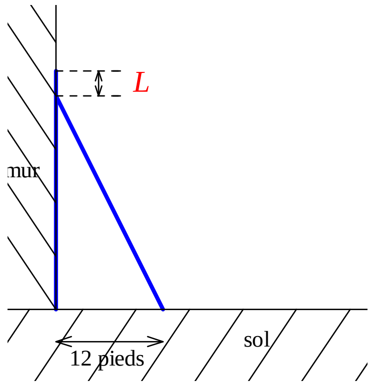
Les deux questions se réfèrent à la même situation mais sont indépendantes l'une de l'autre.

Il est demandé de ne rien noter sur les figures.

À Pise vers 1200 après J.-C. (problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge).

1°) Une lance, longue de 20 pieds*, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol (voir schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle).

Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?
On notera *L* cette longueur en pieds.



* Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ 30 cm.

$L = 4$

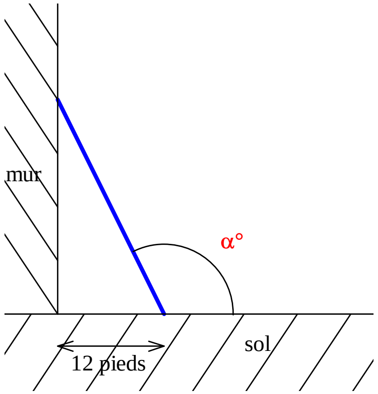
La compétence évaluée ici est : modéliser, entreprendre une recherche.
Il s'agit de modéliser la situation.
On doit faire deux schémas : un avant, un après.

On utilise le théorème de Pythagore : $\sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$.

$L = 20 - 16 = 4$

2°) Dans le cas où l'extrémité de la lance est écartée de 12 pieds par rapport au mur, on note α la mesure en degrés de l'angle obtus formé par la lance et le sol.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de α. Aucune justification n'est demandée.

$\alpha \approx 126,9$ (valeur arrondie au dixième)



On note β la mesure en degrés de l'angle aigu formé par la lance et le sol.

On a : $\cos \beta° = \dfrac{12}{20} = 0,6$ (formule du cosinus dans un triangle rectangle).

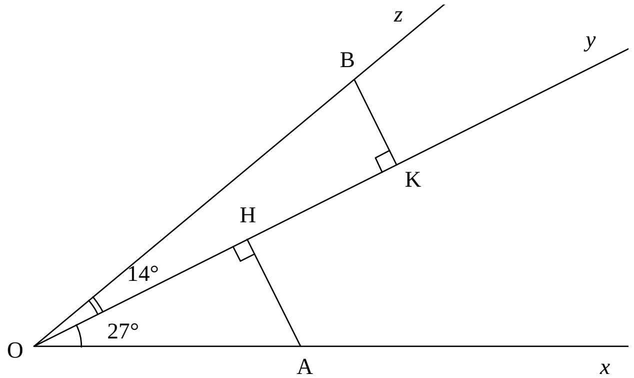
Or $\alpha = 180 - \beta$.

On tape donc sur la calculatrice TI mise en mode degrés : « $180 - \text{Arccos}(0,6)$ ».

On obtient $\alpha = 126,869897...$.

IV.

On considère trois demi-droites [Ox), [Oy), [Oz) de même origine O, formant entre elles deux angles adjacents $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ mesurant respectivement 27° et 14°.
Soit A le point de [Ox) tel que $OA = 5$ et B est le point [Oz) tel que $OB = 7$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite (Oy).
La figure ci-dessous ne respecte pas les mesures données.
Calculer HK (valeur exacte puis valeur arrondie au centième).
Aucun détail de la démarche n'est demandé. On effectuera la recherche au brouillon.
Il est demandé de rien écrire sur la figure.



$\text{HK} = 5\cos 27° - 7\cos 14°$ (valeur exacte)

$\text{HK} \approx 2,34$ (valeur arrondie au centième)

On a : $\text{HK} = \text{OK} - \text{OH}$.

On se place dans les triangles rectangles OAH et OBK.

Dans le triangle OAH rectangle en H, on a : $\cos 27° = \dfrac{\text{OH}}{\text{OA}}$ soit $\cos 27° = \dfrac{\text{OH}}{5}$ d'où $\text{OH} = 5 \times \cos 27°$.

Dans le triangle OBK rectangle en K, on a : $\cos 14° = \dfrac{\text{OK}}{\text{OB}}$ soit $\cos 14° = \dfrac{\text{OK}}{7}$ d'où $\text{OK} = 7 \times \cos 14°$.

Donc $\text{HK} = 5\cos 27° - 7\cos 14°$.

On utilise ensuite la calculatrice mise en mode degrés afin de trouver une valeur approchée de HK.

On obtient $\text{HK} = 2,33703746...$.