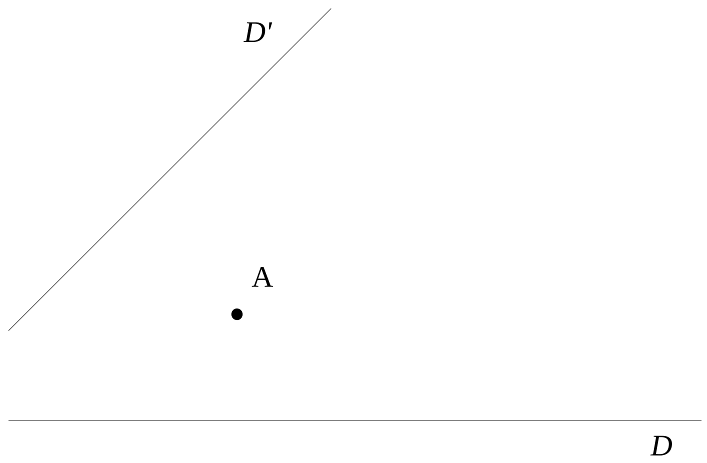
Un problème de construction

On donne deux droites du plan D et D' non parallèles ainsi qu'un point A n'appartenant ni à D et D'.

Construire à la règle non graduée et au compas un point M de D et un point $\mathrm{M'}$ de D' tel que A soit le milieu de $[\mathrm{MM'}]$.

Il s'agit d'un problème de construction. Il est demandé de spécifier le protocole de construction.
La phase de recherche pourra être effectuée sur papier ou sur Geogebra.



Solution :

Un point pour commencer sur les constructions à la règle non graduée et au compas

● Construction d'une parallèle

● Construction d'une perpendiculaire → on peut accepter l'équerre pour se simplifier la vie.

Une mise en garde pour commencer

Attention, le problème peut être beaucoup plus simple si l'on prend des configurations particulières.
Par exemple, si A est situé sur la bissectrice de l'un des angles formés par D et D'.
Ce n'est évidemment pas ça qui nous intéresse.
Ce qui nous intéresse c'est une construction dans le cas général.

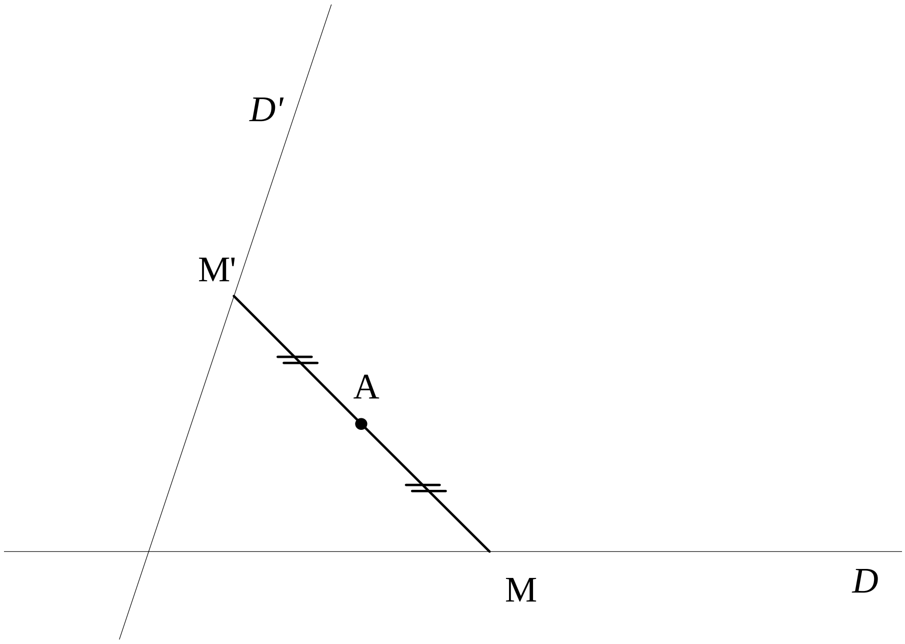
On a aussi discuté sur des constructions fausses en traçant un cercle de centre A. Rien ne garantit que les points d'intersection avec les deux droites soient alignés. On peut avoir une idée fausse en faisant une figure particulière dans le cas où A se trouve sur la bissectrice de l'un des angles formé par les droites D et D'.
La construction doit fonctionner quel que soit l'emplacement du point A.

On procède en deux étapes en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse :

On suppose la figure construite en plaçant A, M et M' d'abord puis les droites D et D'.

On effectue une figure codée.



● Sur cette figure, on effectue des tracés auxiliaires en couleur.

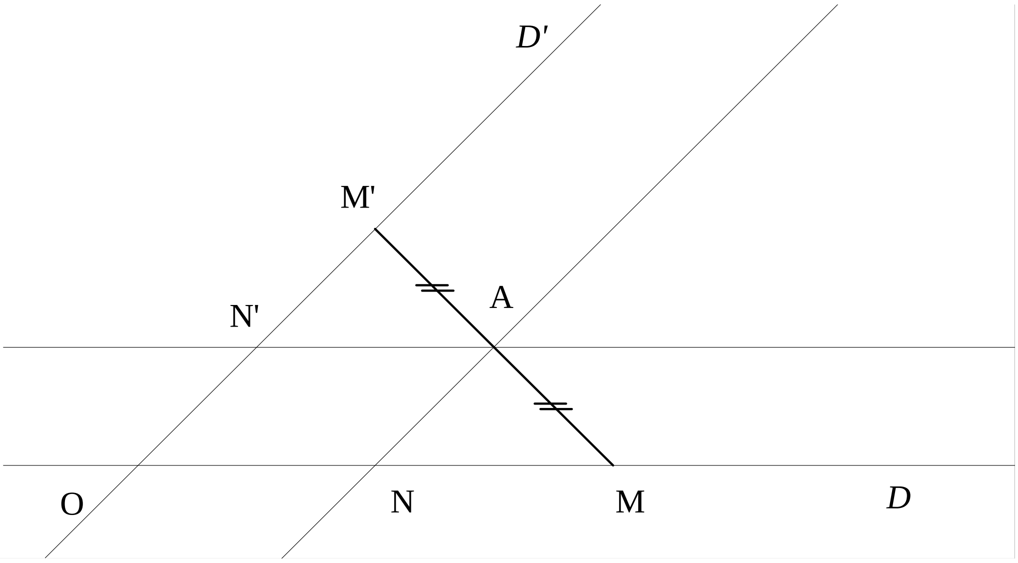
● On nomme les « objets » que dont on a besoin (points et droites).

$1^{ère}$ manière de raisonner

On note O le point d'intersection des droites D et D'.

On trace :
- la droite Δ passant par A et parallèle à D ;
- la droite Δ' passant par A et parallèle à D'.

On note :
- N le point d'intersection des droites D et Δ ;
- N' le point d'intersection des droites D' et Δ'.



Dans le triangle OMM', on sait que A est le milieu de $[MM']$ et que Δ' est parallèle à (OM') donc, d'après un théorème des milieux, N est le milieu de [OM].
On démontrerait de même que N' est le milieu de $[OM']$.

Bilan :

- Le point O n'est pas nommé.

On commence par le nommer.

- Ensuite, on « crée » des droites, des points…

Programme de construction :

Il y a plusieurs constructions possibles.
Les deux premiers sont très proches.

Programme de construction 1

Tracer la droite Δ' passant par A et parallèle à D' ; Δ' coupe la droite D en un point N.
On construit le point M symétrique de O par rapport à N.
Tracer la droite (AM).
On place le point N d'intersection entre la droite D' et (AM).
On peut démontrer que les points M et N vérifient le problème.

Démonstration :

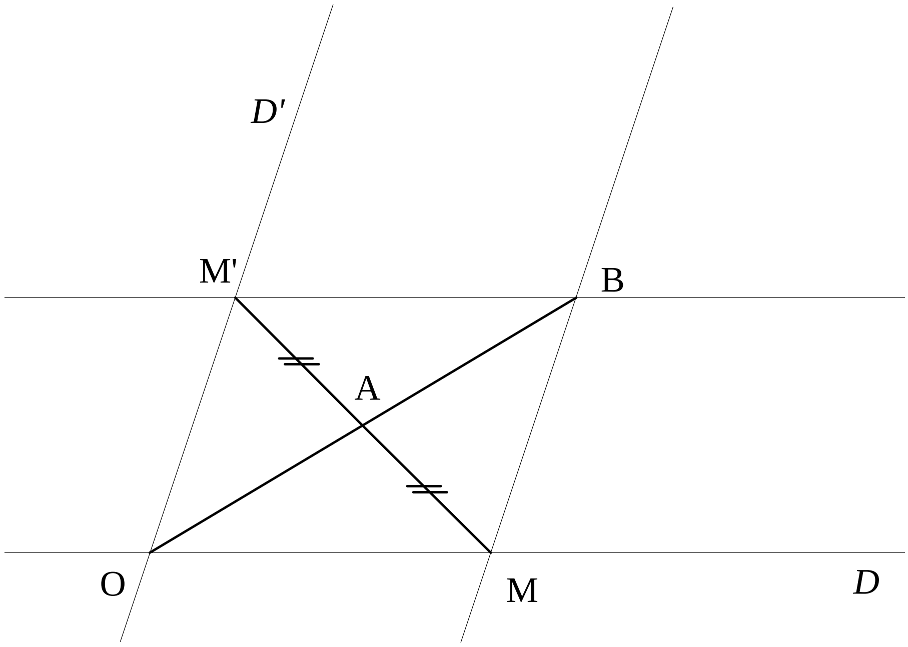
Programme de construction 2

Tracer la droite Δ passant par A et parallèle à D ; Δ coupe la droite D' en un point N'.
Tracer la droite Δ' passant par A et parallèle à D' ; Δ' coupe la droite D en un point N.
On construit le point M symétrique de O par rapport à N.
Tracer la droite (AM).
On place le point N d'intersection entre la droite D' et (AM).
On peut démontrer que les points M et N vérifient le problème.

Démonstration :

2^{e} manière de raisonner

On note O le point d'intersection des droites D et D'.
On trace la droite Δ parallèle à D passant par M' ainsi que la droite Δ' parallèle à D' passant par M.
On note B le point d'intersection de Δ et Δ'.
On trace ensuite les droites (MM') et (OB).
Le quadrilatère $OMBM'$ est un parallélogramme.
Donc A est le milieu de $[MM']$ et de $[OB]$.



Programme de construction :

Placer le point O d'intersection de D et D'.
Tracer ensuite la demi-droite [OA).
Puis avec un compas, tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon OA.
On note B le deuxième point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (OA).
Tracer la parallèle à D passant par le point B. Elle coupe la droite D' en un point M'.
Tracer la parallèle à D' passant par le point B. Elle coupe la droite D en un point M.

On peut démontrer que les points M et N vérifient le problème.

Démonstration :

$OMBM'$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles.
Or on sait que les diagonales d'un parallélogramme ses coupent en leurs milieu.
Donc A est le milieu de la diagonale [OB] et donc de $[MM']$.

3^e manière de raisonner

Avec une symétrie centrale

Cette manière n'est plus tellement au programme.