

Comment travailler avec des valeurs approchées en mathématiques ?

Cours fait le 18-2-2013

1. Il convient de bien faire la différence entre **valeur approchée** et **valeur exacte**.

π est une valeur exacte ; 3,14 est une valeur approchée.

$\sqrt{2}$ est une valeur exacte ; 1,414 est une valeur approchée.

2. En mathématiques, on utilise le symbole « \approx », dès lors qu'on donne une valeur approchée d'un résultat. On écrit par exemple $\pi \approx 3,14$ (valeur arrondie au centième).

3. Attention, en sciences physiques, le symbole = est souvent utilisé – à tort – à la place du symbole \approx .

4. Écriture décimale d'un réel

On peut écrire : $\frac{1}{3} = 0,3333\underline{3}\dots$ (le 3 souligné signifie que l'écriture décimale de $\frac{1}{3}$ ne comporte que des 3).

Cette écriture a bien un sens.

On dit qu'il s'agit du développement décimal illimité de $\frac{1}{3}$.

En revanche, on ne peut écrire $\frac{1}{3} = 0,33$ (on peut juste écrire $\frac{1}{3} \approx 0,33$).

5. En mathématiques, on travaille le plus possible avec les valeurs exactes.

Il y a même des situations où l'on est obligé de travailler avec des valeurs exactes.

6. Résultat affiché par la calculatrice

Voici l'affichage de la calculatrice pour $\sqrt{2}$:

1.414213562

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Son écriture décimale est illimitée, sans période.

On peut écrire :

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

(on n'écrit pas la dernière décimale qui peut provenir d'un arrondi)

Cours fait le 22-2-2013

1. On se gardera d'écrire $\pi = 3,141$ à 10^{-3} près comme on le trouve dans les livres.

En revanche, on pourra écrire : $\pi \approx 3,141$ (valeur approchée à 10^{-3} près).

De même, on ne peut écrire $\pi = 3,141$ (valeur arrondie au millième).

En revanche, on pourra dire que la valeur arrondie au millième de π est 3,141.

2. Les calculatrices ordinaires travaillent avec des valeurs approchées.

En revanche, certaines calculatrices et certains logiciels permettent de travailler avec des valeurs exactes (calcul formel).

3. En mathématiques, on évite d'employer des valeurs approchées à l'intérieur de calculs (contrairement à la physique, où l'on y fait moins attention et même où l'on y est obligé assez souvent).

Quand on y est obligé, on cache le calcul.

Exemple :

On demande de calculer un volume V puis d'en déduire une hauteur.

Pour donner le volume, on pourra donner la valeur exacte et/ou la valeur approchée.

Pour calculer la hauteur, on donnera l'expression en fonction de V (remplacé par sa valeur exacte).

On achèvera le calcul avec la valeur exacte grâce à la calculatrice.

En mathématiques, on évite de reprendre une valeur approchée pour faire un nouveau calcul.

Complément :

Un nombre terminé par trois petits points (exemple : 3,3333...) n'est pas une valeur exacte $\left(\frac{10}{3}\right)$.

On peut simplement dire que l'on a écrit le début de l'écriture décimale du nombre $\frac{10}{3}$ et que toutes les décimales écrites sont exactes mais c'est tout.

Exemple-type :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 3$.
Calculer la valeur arrondie au centième de BC.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 5^2 + 3^2 \\ &= 25 + 9 \\ &= 34 \end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{34}$ (valeur exacte).

Avec la calculatrice, on obtient $BC = 5,83095189\dots$

Donc $BC \approx 5,83$ (valeur arrondie au centième).

On retiendra la présentation et la rédaction de cet exemple-type lors de calculs en mathématiques.

Appendice :

Comment savoir si la dernière décimale affichée par la calculatrice est exacte ? Si non, peut-on connaître la décimale exacte ?

Voici l'affichage de la calculatrice pour $\sqrt{2}$:

1.414213562

Pour savoir si la dernière décimale affichée, ici 2, est exacte, on peut mettre en œuvre l'idée suivante, on effectue la différence entre $\sqrt{2}$ et 1,41421356.

$\sqrt{2} - 1,41421356$ donne l'affichage $2,3731 \times 10^{-9}$.

On en déduit que :

- la décimale 2 est exacte ;
- les décimales qui suivent sont 3, 7, 3 (on parle de « décimales cachées »).

On peut donc écrire : $\sqrt{2} = 1,414213562373... .$

Question : Peut-on connaître toutes les décimales de $\sqrt{2}$? Peut-on aller aussi loin que l'on veut ?

La réponse est non. La calculatrice ne peut stocker qu'un nombre fini de décimales.