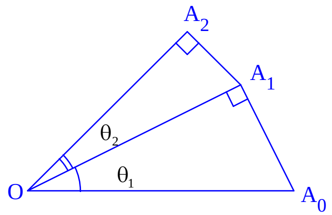
$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 2-5-2014 (30 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..……………   **Note :** …….. **/ 20**

I.   …… / 2

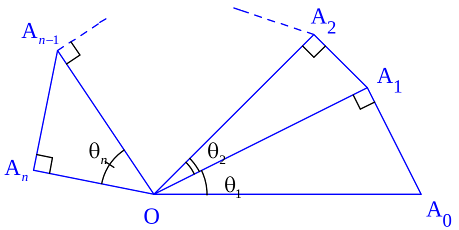
1°) On considère la figure ci-dessous. On pose $OA_0 = a$.



Exprimer OA_2 en fonction de a, θ_1, θ_2.

$OA_2 =$ ……………………………

2°) On poursuit la construction n fois sur le même principe en tournant toujours dans le même sens comme le montre la figure ci-dessous.



Exprimer OA_n en fonction de a, θ_1, θ_2, …, θ_n.

$OA_n =$ ……………………………………………

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

II. Questions rapides   …… / 12

On se contentera de donner les résultats sans justifier.

1°) Soit D et D' deux droites perpendiculaires. On sait que D a pour coefficient directeur 3. Quel est le coefficient directeur de D' ?

…………………

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(1 ; – 3) et de rayon 2.

…………………………………………………………..…

3°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [BC] où B et C sont les points de coordonnées respectives (2 ; 1) et (4 ; – 1).

…………………………………………………………..…

4°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par E et perpendiculaire à (OE) où E est le point de coordonnées (3 ; 4).

…………………………………………………………..…

5°) Déterminer la nature de l'ensemble F des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Répondre avec précision.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

III.   …… / 2

Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

Déterminer par le calcul les ordonnées des points d'intersection de Γ et de la droite Δ_λ d'équation $x = \lambda$ où λ est un réel de l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$. Détailler la démarche.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……..

……..

……..

……..

……..

IV. ...... / 3

On considère le point A(a ; 0) où a est un réel non nul. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon $R > |a|$.
Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Ox) en E et F (on suppose que $x_E < x_F$) et l'axe (Oy) en G et H (on suppose que $y_G < y_H$). On note α la mesure en radians de l'angle aigu formé par la droite (AG) et l'axe (Ox).

Compléter les phrases suivantes. On répondra graphiquement (donc sans calcul) en fonction de R et a.

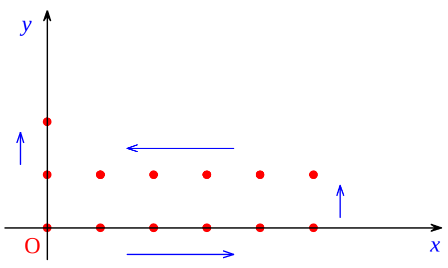
- E et F ont pour abscisses respectives : ………………………………………………………………………

- G et H ont pour ordonnées respectives : ………………………………………………………………………

- $\tan\alpha$ = ...

V. Algorithmique ...... / 1

On donne deux entiers naturels n et p fixés. On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées (x ; y) vérifient les conditions suivantes : $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x \leqslant n$, $0 \leqslant y \leqslant p$.
On souhaite faire afficher par un algorithme les points de E dans l'ordre montré sur le graphique ci-dessous (dit en « boustrophédon »), en commençant par le point O.



Lequel des trois algorithmes permet de répondre au problème ? Aucune justification n'est demandée.
On ne demande pas de programmer ces algorithmes sur la calculatrice.

Algorithme 1 :

> **Entrées :**
> Saisir n et p
>
> **Traitement et sortie :**
> **Pour** i allant de 0 à n **Faire**
> | **Pour** j allant de 0 à p **Faire**
> | | Marquer le point de coordonnées $(i\ ;\ j)$
> | **FinPour**
> **FinPour**

Algorithme 2 :

> **Entrées :**
> Saisir n et p
>
> **Traitement et sortie :**
> **Pour** j allant de 0 à p **Faire**
> | **Pour** i allant de 0 à n **Faire**
> | | **Si** j est pair
> | | | Alors marquer le point de coordonnées $(i\ ;\ j)$
> | | | Sinon marquer le point de coordonnées $(n-i\ ;\ j)$
> | | **FinSi**
> | **FinPour**
> **FinPour**

Algorithme 3 :

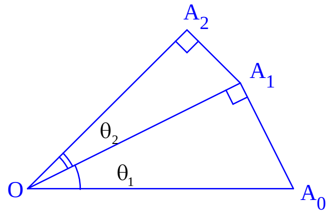
> **Entrées :**
> Saisir n et p
>
> **Traitement et sortie :**
> **Pour** j allant de 0 à p **Faire**
> | **Pour** i allant de 0 à n **Faire**
> | | Marquer le point de coordonnées $(i\ ;\ j)$
> | **FinPour**
> **FinPour**

Algorithme choisi : ………

Corrigé du contrôle du 2-5-2014

I.

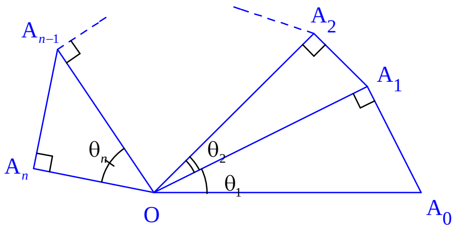
1°) On considère la figure ci-dessous. On pose $OA_0 = a$.



Exprimer OA_2 en fonction de a, θ_1, θ_2.

$$OA_2 = a\cos\theta_1 \times \cos\theta_2$$

2°) On poursuit la construction n fois sur le même principe en tournant toujours dans le même sens comme le montre la figure ci-dessous.



Exprimer OA_n en fonction de a, θ_1, θ_2, …, θ_n.

$$OA_n = a\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 \times \ldots \times \cos\theta_n$$

On peut aussi utiliser le symbole Π (qui signifie « produit ») qui permet d'écrire la formule générale sous une forme très condensée :

$$OA_n = a\left(\prod_{k=1}^{k=n} \cos\theta_k\right)$$

Le symbole Π est l'analogue du symbole Σ pour les sommes.

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

II. Questions rapides

On se contentera de donner les résultats.

1°) Soit D et D' deux droites perpendiculaires. On sait que D a pour coefficient directeur 3.
Quel est le coefficient directeur de D' ?

$$-\frac{1}{3}$$

On utilise la règle du produit des coefficients directeurs dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(1 ; – 3) et de rayon 2.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

La meilleure méthode consiste à dire :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0 \end{aligned}$$

3°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [BC] où B et C sont les points de coordonnées respectives (2 ; 1) et (4 ; – 1).

$$x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$$

La meilleure méthode consiste à dire :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)\times(4-x) + (1-y)(-1-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0 \end{aligned}$$

4°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par E et perpendiculaire à (OE) où E est le point de coordonnées (3 ; 4).

$$3x + 4y - 25 = 0$$

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\times 3 + (y-4)\times 4 = 0$ (rappel : O est l'origine du repère donc a pour coordonnées (0 ; 0))

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0$

5°) Déterminer la nature de l'ensemble F des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient $x^2+y^2-6x+2y+5=0$. Répondre avec précision.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in F &\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=5 \\ &\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2=5 \text{ où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } (3\,;-1) \\ &\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}=\sqrt{5} \end{aligned}$$

F est le cercle de centre $\Omega(3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

III.

Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
Déterminer par le calcul les ordonnées des points d'intersection de Γ et de la droite Δ_λ d'équation $x=\lambda$ où λ est un réel de l'intervalle $]-1\,;1[$. Détailler la démarche.

Γ a pour équation $x^2+y^2=1$.

Les ordonnées des points d'intersection de Γ et de la droite Δ_λ sont les solutions de l'équation $\lambda^2+y^2=1$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow y^2=1-\lambda^2 \\ &\Leftrightarrow y=\sqrt{1-\lambda^2} \text{ ou } y=-\sqrt{1-\lambda^2} \quad (\text{car } \lambda\in]-1\,;1[\text{ donc } 1-\lambda^2>0) \end{aligned}$$

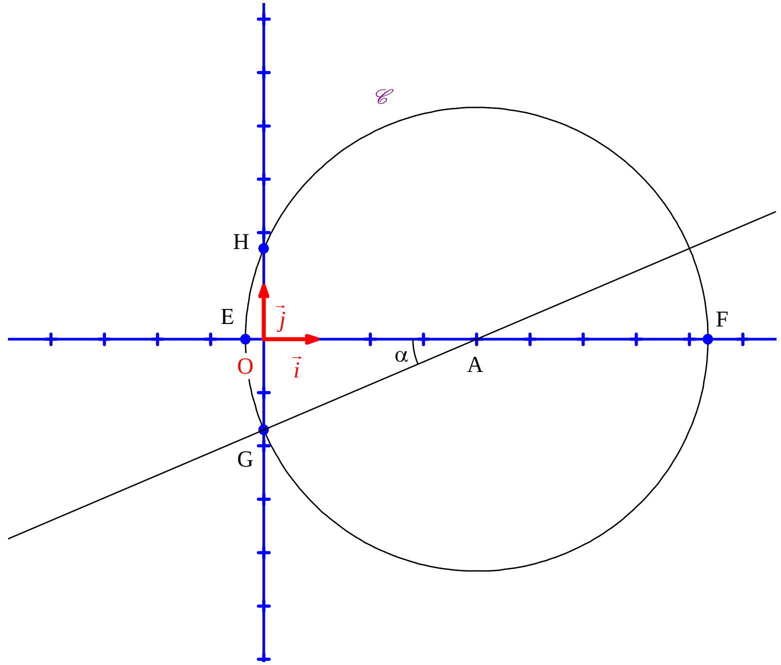
Les ordonnées des points d'intersection de Γ et de Δ_λ sont $\sqrt{1-\lambda^2}$ et $-\sqrt{1-\lambda^2}$.

IV.

On considère le point A(a ; 0) où a est un réel non nul. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon $R>|a|$.
Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe (Ox) en E et F (on suppose que $x_E<x_F$) et l'axe (Oy) en G et H (on suppose que $y_G<y_H$). On note α la mesure en radians de l'angle aigu formé par la droite (AG) et l'axe (Ox).

Compléter les phrases suivantes. On répondra graphiquement (donc sans calcul) en fonction de R et a.

- E et F ont pour abscisses respectives : $a-R$ et $a+R$.
- G et H ont pour ordonnées respectives : $-\sqrt{R^2-a^2}$ et $\sqrt{R^2-a^2}$.
- $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{R^2-a^2}}{|a|}$



On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OAG.
On a : $\mathrm{AG}^2=\mathrm{OG}^2+\mathrm{OA}^2$ donc $R^2=\mathrm{OG}^2+a^2$.
Par suite, $\mathrm{OG}^2=R^2-a^2$.
Donc $\mathrm{OG}=\sqrt{R^2-a^2}$.

Par la même méthode, on obtient $\mathrm{OH}=\sqrt{R^2-a^2}$.

G a une ordonnée négative ; H a une ordonnée positive.

On en déduit les résultats demandés.

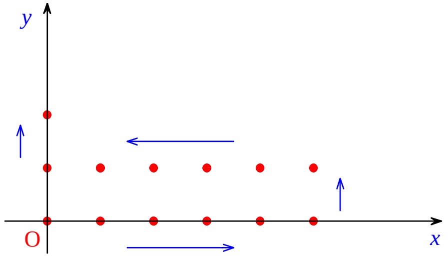
On se place dans le triangle OAG rectangle en O.

On a : $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OA}}$.

V. Algorithmique

On donne deux entiers naturels n et p fixés. On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées (x ; y) vérifient les conditions suivantes : $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$, $0\leqslant x\leqslant n$, $0\leqslant y\leqslant p$.

On souhaite faire afficher par un algorithme les points de E dans l'ordre montré sur le graphique ci-dessous (dit en « boustrophédon »), en commençant par le point O.



Lequel des trois algorithmes permet de répondre au problème ? Aucune justification n'est demandée.
On ne demande pas de programmer ces algorithmes sur la calculatrice.

Algorithme 1 :

Entrées :
Saisir n et p

Traitement et sortie :
Pour i allant de 0 à n **Faire**
  Pour j allant de 0 à p **Faire**
    Marquer le point de coordonnées $(i\,;\,j)$
  FinPour
FinPour

Algorithme 2 :

Entrées :
Saisir n et p

Traitement et sortie :
Pour j allant de 0 à p **Faire**
  Pour i allant de 0 à n **Faire**
    Si j est pair
      Alors marquer le point de coordonnées $(i\,;\,j)$
      Sinon marquer le point de coordonnées $(n-i\,;\,j)$
    FinSi
  FinPour
FinPour

Algorithme 3 :

Entrées :
Saisir n et p

Traitement et sortie :
Pour j allant de 0 à p **Faire**
  Pour i allant de 0 à n **Faire**
    Marquer le point de coordonnées $(i\,;\,j)$
  FinPour
FinPour

Algorithme choisi : **2**

Justification :

Lorsque le numéro de la ligne est pair (qui est donné par la variable j), les points se placent les uns après les autres de gauche à droite.
Lorsque le numéro de la ligne est impair, les points se placent les uns après les autres de droite à gauche.

Lorsque j est pair, on va de droite à gauche.
Lorsque j est impair, on va de gauche à droite.

La programmation de cet algorithme sur calculatrice est intéressante.