TS1

Contrôle du jeudi 3 avril 2014 (50 minutes)

Prénom : …………………………………………..…….. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (7 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad D' \begin{cases} x = -6 + 2t' \\ y = t' \\ z = 7 - \dfrac{3}{2}t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$.

1°) Parmi les points suivants, lequel (lesquels) appartient (appartiennent) à D ?
Entourer le (les) point(s) choisi(s) sans justifier.

$\mathrm{A}(-1\,;1\,;2)$ $\qquad$ $\mathrm{B}(1\,;-1\,;-2)$ $\qquad$ $\mathrm{C}(3\,;-3\,;6)$

2°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? sécantes (si oui, préciser le point) ?
Justifier en rédigeant de manière concise.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) On note P le plan d'équation $z = 1$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de D' et P.

E(……….;……….;……….)

4°) On considère le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu - 4 \\ z = \lambda + \mu + 2 \end{cases} \quad \left((\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2\right)$.

a) Parmi les points du 1°), lesquels appartiennent à P' ? Répondre sans justifier.

…………………………………………

b) Donner un repère de P' sans justifier.

………

………

………

………

II. (1 point)

Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 3^{2014} (détailler un petit peu la démarche sur une ligne).

………

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left| x^2 + 2x - 3 \right|$. Compléter :

L'ensemble de définition de f est $D = $............................ .

Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = $.. (donner un seul résultat).

IV. (10 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 4 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - (\ln x)^2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$ en détaillant la démarche.
Déterminer les conséquences graphiques éventuelles pour $\mathcal{C}$.

2°) Calculer $f'(x)$ (donner le résultat sous la forme d'un seul quotient).

3°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f.
On n'oubliera pas de mettre dans le tableau le(s) extremum(s) de f ainsi que les limites déterminées au 1°).

4°) Déterminer suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (E).

5°) *Question bonus :* Déterminer avec soin $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

Corrigé du contrôle du 3-4-2014

I.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes

d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ $\qquad D' \begin{cases} x = -6 + 2t' \\ y = t' \\ z = 7 - \dfrac{3}{2}t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$.

1°) Parmi les points suivants lequel (lesquels) appartient (appartiennent) à D ?
Entourer le (les) point(s) choisi(s) sans justifier.

$\text{A}(-1\,;1\,;2)$ $\qquad$ $\text{B}(1\,;-1\,;-2)$ $\qquad$ $\text{C}(3\,;-3\,;6)$

Pour le point A :

On résout le système $\begin{cases} 1 - t = -1 \\ -1 + t = 1 \\ -2 + 2t = 2 \end{cases}$. On trouve $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$.

Dans les trois équations on retrouve le même t donc $\text{A} \in D$ et il est associé au paramètre $t = 2$.

Pour le point B :

On peut procéder de la même manière ou bien dire tout de suite que $\text{B} \in D$ et il est associé au paramètre $t = 0$.

Pour le point C :

On résout le système $\begin{cases} 1 - t = 3 \\ -1 + t = -3 \\ -2 + 2t = 6 \end{cases}$. On trouve $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 4 \end{cases}$.

On ne trouve pas le même t dans les trois équations donc $\text{C} \notin D$.

2°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? sécantes (si oui, préciser le point) ?
Justifier en rédigeant de manière concise.

On sait que le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;1\,;2)$ est un vecteur directeur de D et que le vecteur $\vec{u}'\left(2\,;1\,;-\dfrac{3}{2}\right)$ est un vecteur directeur de D'.

Il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires et par suite, les droites D et D' ne sont pas parallèles.

Pour savoir si D et D' sont sécantes, on résout le système $\begin{cases} 1 - t = -6 + 2t' & (1) \\ -1 + t = t' & (2) \\ -2 + 2t = 7 - \dfrac{3}{2}t' & (3) \end{cases}$.

1^ère^ méthode : On utilise la calculatrice.

Pour la calculatrice Numworks, on rentre directement le système des tris équations (on met juste à la ligne à chaque fois). Évidemment, on change le nom des inconnues (x à la place de t et y à la place de t').
Le système admet le couple $(3\,;2)$ pour solution.

2^e^ méthode : On résout à la main.

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = 2 \end{cases}$

Le couple $(3\,;2)$ vérifie l'équation (3) donc le système admet le couple $(3\,;2)$ pour solution.
Les droites D et D' sont donc sécantes au point $\text{I}(-2\,;2\,;4)$.

On trouve les coordonnées de I en remplaçant t par 3 dans les équations paramétriques qui définissent D ou t' par 2 dans les équations paramétriques qui définissent D'.
On trouve évidemment le même résultat.

3°) On note P le plan d'équation $z = 1$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de D' et P.

$$\text{E}(2\,;4\,;1)$$

P est un plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$.

Il s'agit d'un plan horizontal sur la représentation habituelle en perspective d'un repère de l'espace.

On sait que $\text{E} \in P$ donc $z_{\text{E}} = 1$.

De plus, $\text{E} \in D'$ donc le paramètre t' du point E sur la droite D' vérifie l'égalité $7 - \dfrac{3}{2}t' = 1$.

Par simple résolution, on trouve $t' = 4$.

On remplace t' par 4 dans les deux premières équations paramétriques.

$\begin{cases} x_{\text{E}} = -6 + 2 \times 4 \\ y_{\text{E}} = 4 \end{cases}$

4°) On considère le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu - 4 \\ z = \lambda + \mu + 2 \end{cases} \quad \left((\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2\right)$.

a) Parmi les points du 1°), lesquels appartiennent à P' ? Répondre sans justifier.

C

Pour le point A :

On résout le système $\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu - 4 = 1 \\ \lambda + \mu + 2 = 2 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $\mu = 5$.

On regarde ensuite si la troisième équation est vérifiée.
On constate que non.
La troisième équation n'est pas vérifiée donc $\text{A} \notin P'$.

Pour le point B :

On résout le système $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu - 4 = -1 \\ \lambda + \mu + 2 = -2 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $\mu = 3$.

On regarde ensuite si la troisième équation est vérifiée.
On constate que non.
La troisième équation n'est pas vérifiée donc $\text{B} \notin P'$.

Pour le point C :

On résout le système $\begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu - 4 = -3 \\ \lambda + \mu + 2 = 6 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $\mu = 1$.

On regarde ensuite si la troisième équation est vérifiée.
On constate que oui.
La troisième équation est vérifiée donc $\text{C} \notin P'$.

b) Donner un repère de P' sans justifier.

$$\left(\text{C}, \vec{v}, \vec{v}'\right) \text{ avec } \vec{v}\,(1\,;0\,;1) \text{ et } \vec{v}'\,(0\,;1\,;1)$$

Le point C est déjà défini dans l'énoncé.

On constate aisément que $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires.

II.

Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 3^{2014} (détailler un petit peu la démarche sur une ligne).

$$\text{E}\left(\log\left(3^{2014}\right)\right) + 1 = \text{E}\left(2014 \log 3\right) + 1 = 960 + 1 = 961$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left| x^2 + 2x - 3 \right|$. Compléter :

L'ensemble de définition de *f* est $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;1\}$.

Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ (donner un seul résultat).

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - (\ln x)^2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les limites de *f* en 0^+ et en $+\infty$ en détaillant la démarche.
Déterminer les conséquences graphiques éventuelles pour $\mathcal{C}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une différence } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Remarque : Il n'y a pas de forme indéterminée» en 0^+.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \infty - \infty \text{ » en } +\infty.$$

On effectue une réécriture pour lever l'indétermination.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \ln x (1 - \ln x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

2°) Calculer $f'(x)$ (donner le résultat sous la forme d'un seul quotient).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) &= \frac{1}{x} - 2\ln x \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1 - 2\ln x}{x} \end{aligned}$$

3°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de *f*.
On n'oubliera pas de mettre dans le tableau le(s) extremum(s) de *f* ainsi que les limites déterminées au 1°).

$$1-2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\mathrm{e}}$$

$$1-2\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x<\sqrt{\mathrm{e}}$$

$$1-2\ln x<0 \Leftrightarrow x>\sqrt{\mathrm{e}}$$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
Signe de $1-2\ln x$		$+$	0	$-$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

4°) Déterminer suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ (E).

On s'appuie sur le tableau de variations pour mettre en forme la discussion.

- Si $k>\frac{1}{4}$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.
- Si $k=\frac{1}{4}$, alors l'équation (E) admet une unique solution.
- Si $k<\frac{1}{4}$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ce dernier cas, et seulement dans ce cas, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée.

Voici un exemple de rédaction permettant de justifier l'existence de deux solutions dans ce dernier cas.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}\right]$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{4}$
Donc comme $k<\frac{1}{4}$ par hypothèse, d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}\right]$.

On procède de la même manière pour l'intervalle $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$.

On peut aussi résoudre l'équation algébriquement (équation du second degré en posant : $X=\ln x$ puis une petit travail à faire ensuite).

5°) *Question bonus :* Déterminer avec soin $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}$$

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$, on effectue le changement de variable $X=\sqrt{x}$ (obligatoire car ce n'est pas une limite de référence).

$$x\to+\infty \Leftrightarrow X\to+\infty$$

$$\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{\left(\ln\left(X^2\right)\right)^2}{X^2}=4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2$$

On a : $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).