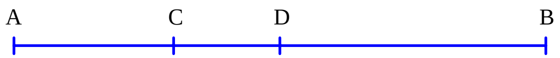
TS1

Contrôle du jeudi 10 avril 2014 (50 minutes)

Prénom : …………………………………….…….. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (2 points)

On considère quatre points A, B, C, D tels que A, C, D, B soient alignés dans cet ordre avec $AB = 10$, $AC = 3$ et $AD = 5$.
On choisit un point M au hasard sur le segment [AB]. Donner les probabilités sous forme décimale.



Quelle est la probabilité que le point M soit à égale distance de C et D ? ……… (un seul résultat sans égalité)

Quelle est la probabilité que le point M soit plus près de C que de D ? ……… (un seul résultat sans égalité)

II. (1 point)

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R. On note A un point fixé de Γ.
On choisit un point M au hasard sur Γ. Quelle est la probabilité que l'on ait $AM \geqslant R\sqrt{2}$?

……… (un seul résultat sans égalité)

III. (2 points)

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1°) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 15}{4}$?

Z suit la loi ……..……………………………………………………………………………..………………

2°) On note u le réel tel que $P(X \leqslant u) = 0{,}8$.

$u \approx$ .... (valeur arrondie au millième)

IV. (6 points)

La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1°) On sait que $P(X \leqslant 62) = 0{,}15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ (justifier rapidement).
2°) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ? Donner la valeur arrondie au centième.
3°) L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux. Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier rapidement.

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

……………………..…………………………………………………………………………….………………

V. (3 points)

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}2$ et que Y suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0{,}05$ (les paramètres étant tous exprimés en millimètre).
Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$.
Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. On prélève une pièce au hasard. On appelle A l'événement « la pièce est conforme pour la longueur » et B l'événement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que ces événements sont indépendants.
Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi au millième).

………

………

………

………

………

Dans les exercices **VI** et **VII**, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

VI. (4 points)

On note *f* l'application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M du plan d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{e}^{|z|} \times z$. Le point M' est appelé l'image de M par *f*.

1°) On suppose que $z \neq 0$. On note *r* le module de *z* et θ un argument de *z*.
Donner une écriture exponentielle de z' (donner le résultat directement sans expliquer).

………

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

………

………

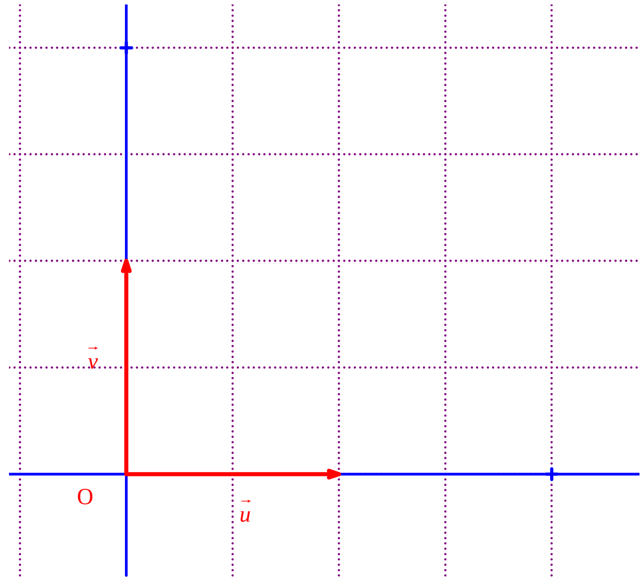
………

………

………

VII. (2 points)

Tracer sans expliquer sur le graphique ci-contre l'ensemble *F* des points M d'affixe $z = 1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.



VIII. (2 points)

Calculer $\mathrm{S} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{16\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{18\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{11}}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

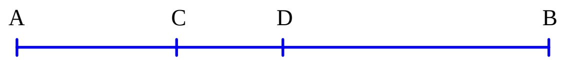
………

Corrigé du contrôle du 10-4-2014

Le barème a été donné sur 22 par erreur et a été laissé sur 22 lors de la correction.

I.

On considère quatre points A, C, D, B alignés dans cet ordre tels que $AB = 10$, $AC = 3$ et $AD = 5$.
On choisit un point M au hasard sur le segment [AB]. Donner les probabilités sous forme décimale.



Quelle est la probabilité que le point M soit à égale distance de C et D ? 0 (un seul résultat sans égalité)

M est équidistant de A et de B signifie que M est le milieu de [AB].
Donc la probabilité que le point M soit équidistant de A et de B est égale à 0 car la probabilité d'un singleton est égale à 0.

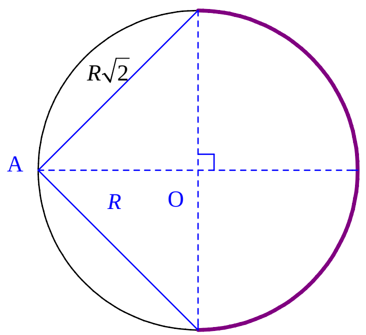
Quelle est la probabilité que le point M soit plus près de C que de D ? 0,4 (un seul résultat sans égalité)

II.

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R. On note A un point fixé de Γ.
On choisit un point M au hasard sur Γ. Quelle est la probabilité que l'on ait $AM \geqslant R\sqrt{2}$?

$\frac{1}{2}$ (un seul résultat sans égalité)

Il fallait se souvenir de la formule donnant la longueur de la diagonale d'un carré de côté a : $a\sqrt{2}$.



III.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1°) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = \frac{X-15}{4}$?

Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

2°) On note u le réel tel que $P(X \leqslant u) = 0{,}8$.

$u \approx 18{,}366$ (valeur arrondie au millième)

IV.

La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1°) On sait que $P(X \leqslant 62) = 0{,}15$.

Déterminer la valeur exacte du réel λ (justifier rapidement).
2°) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ? Donner la valeur arrondie au centième.
3°) L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux. Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier rapidement.

1°) $P(X \leqslant 62) = 0{,}15 \Leftrightarrow 1 - e^{62\lambda} = 0{,}15$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}85}{62}$$

2°) $P(X \geqslant 5 / X \geqslant 3) = P(X \geqslant 2)$ (propriété de la durée de vie sans vieillissement)

$= e^{-2\lambda}$

Avec la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 5 / X \geqslant 3) \approx 0{,}99$ (valeur arrondie au centième).

3°) On utilise la loi binomiale de paramètres 800 et 0,01 pour mettre en place un critère de décision (ou test).
Avec la calculatrice, on obtient l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des moteurs défectueux dans un lot de 800 moteurs : $I = \left[\frac{3}{800}\,;\frac{14}{800}\right]$.

La fréquence des moteurs défectueux parmi les moteurs prélevés est égale à $\frac{15}{800}$. Comme elle n'appartient pas à l'intervalle I, l'annonce peut être remise en question au risque de 5 % d'erreur.

V.

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$ (les paramètres étant tous exprimés en millimètre).
Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$.
Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. On prélève une pièce au hasard. On appelle A l'événement « la pièce est conforme pour la longueur » et B l'événement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que ces événements sont indépendants.
Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi au millième).

Soit C l'événement : « La pièce n'est pas conforme ».

$\mathrm{C} = \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$

$$\begin{aligned} P(\mathrm{C}) &= 1 - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= 1 - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) \qquad \text{(car les événements A et B sont indépendants*)} \\ &= 1 - P(35,4 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 36,6) \times P(5,88 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 6,12) \\ &= 0,0190507... \ * \end{aligned}$$

Donc $P(\mathrm{C}) \approx 0,019$ (valeur arrondie au millième)

On cache les calculs que l'on fait sur la calculatrice**.

* Attention à ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.
Les deux notions n'ont rien à voir.

** On cache tous les calculs effectués à la calculatrice pour ne donner que le résultat final.
On n'utilise pas la propriété du cours sur les plages de normalité car les valeurs des probabilités données dans le cours sont des valeurs approchées.

Dans les exercices **VI** et **VII**, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

VI.

On note *f* l'application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M du plan d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{e}^{|z|} \times z$. Le point M' est appelé l'image de M par *f*.

1°) On suppose que $z \neq 0$. On note *r* le module de *z* et θ un argument de *z*.
Donner une écriture exponentielle de z' (donner le résultat directement sans expliquer).

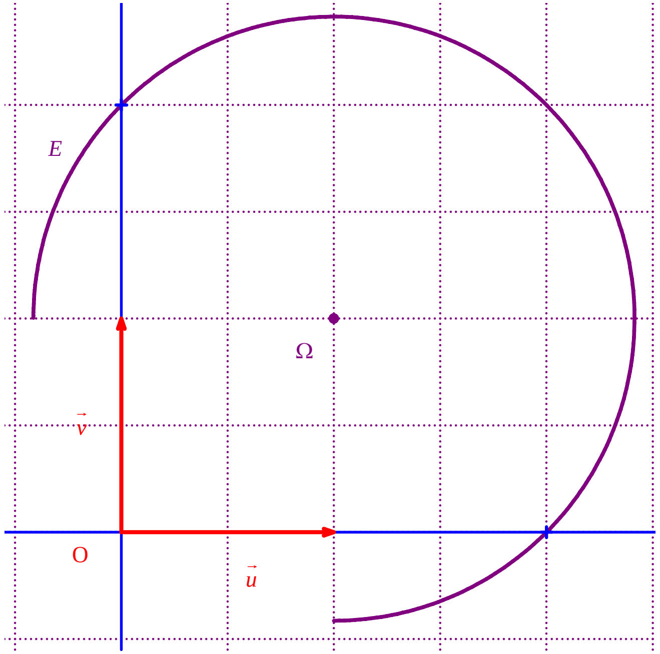
$$z' = r\mathrm{e}^{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 a pour équation paramétrique complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.
Le point M' associé a pour affixe $z' = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, M' décrit donc le cercle de centre O et de rayon e.
Ainsi, l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 est le cercle de centre O et de rayon e.

VII.

Tracer sans expliquer sur le graphique ci-contre l'ensemble *F* des points M d'affixe $z = 1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.



L'ensemble *E* est un grand arc du cercle de centre $\Omega(1+\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{2}$.
Ce cercle passe par l'origine O du repère ce qui permet un tracé très précis de l'ensemble *E*.

VIII.

Calculer $S=1+e^{i\frac{2\pi}{11}}+e^{i\frac{4\pi}{11}}+e^{i\frac{6\pi}{11}}+e^{i\frac{8\pi}{11}}+e^{i\frac{10\pi}{11}}+e^{i\frac{12\pi}{11}}+e^{i\frac{14\pi}{11}}+e^{i\frac{16\pi}{11}}+e^{i\frac{18\pi}{11}}+e^{i\frac{20\pi}{11}}$.

$$S=\sum_{k=0}^{k=10} e^{i\frac{2k\pi}{11}}$$

$$=\sum_{k=0}^{k=10}\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^k$$

$$=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{11}}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}}$$

$$=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}}$$

$$=\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}}$$

$$=0$$