1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 6-6-2014 (60 minutes)

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) On admet que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n > 0$.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Faire une démonstration.

2°) Programmer le calcul des termes de la suite (u_n) sur la calculatrice.
On admet que la suite (u_n) converge.
Quelle semble être la valeur de sa limite ? Répondre sans justifier.

3°) a) Déterminer le plus petit entier naturel *p* tel que $u_p \leqslant 0{,}1$. Répondre sans justifier.
b) On considère la proposition conditionnelle suivante :

$$P : \text{« Si } n \geqslant p\text{, alors } u_n \leqslant 0{,}1 \text{ ».}$$

Recopier la proposition *P* en remplaçant *p* par la valeur déterminée au a).
La proposition *P* est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$ pour tout entier naturel *n*.

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

On répondra sans justifier aux questions suivantes.

On sera particulièrement vigilant sur la syntaxe utilisée lors de l'écriture des formules demandées.

1°) On souhaite réaliser une feuille de calcul sur le modèle ci-contre.
Dans la colonne A, on entre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer automatiquement tous les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{24}. Pour cela, on entre dans la cellule B2 la valeur 5 puis on saisit dans la cellule B3 une formule qui sera recopiée vers le bas.
Écrire la formule qu'il faut saisir dans la cellule B3.
Jusqu'à quelle cellule faut-il recopier cette formule ?

2°) Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 afin d'obtenir la somme de tous les termes de u_0 à u_{24} ?

III.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad(1)$.

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = 0$ $\quad(2)$.

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ $\quad(3)$.

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

IV.

1°) Démontrer que pour tout réel *x* on a : $(1+\cos x+\sin x)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

2°) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x + \sin x = -1$ $\quad(\text{E})$.

V.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

À tout réel θ on fait correspondre le point M de coordonnées $(\sin\theta\,;\cos 2\theta + 2\sin\theta)$.

1°) Démontrer que M appartient à la parabole d'équation Γ d'équation $y = -2x^2 + 2x + 1$.

2°) Déterminer les coordonnées du sommet S de Γ.

3°) Quel est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $\mathbb{R}$? Justifier.

4°) Calculer à l'aide de la calculatrice la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine du plan limité par la courbe Γ, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des abscisses en unité d'aire.

VI.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives (1 ; 1), (– 1 ; 1), (– 1 ; – 1), (1 ; – 1). On note *E* le disque fermé de centre O et de rayon 1.

1°) On choisit 400 points au hasard à l'intérieur du carré ABCD.
a) Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la fréquence *f* des points situés dans *E*. Donner les bornes d'abord sous forme fractionnaire puis sous forme décimale.
b) Calculer l'amplitude de I (donner le résultat sous forme décimale).

2°) On considère l'algorithme ci-dessous permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $(x\,;\,y)$ au hasard à l'intérieur du carré ABCD et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont dans E. Recopier et compléter cet algorithme :

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n Faire
    x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle …………..

    y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle …………..

    Si …………………………

        Alors a prend la valeur …………

    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……
```

Écrire l'algorithme dans un cadre, sur une seule et même page, en respectant les règles usuelles de rédaction.

VII.

On rappelle qu'un carré parfait est le carré d'un entier naturel (exemples : 0, 1, 4, 9, 16, 25 …).

On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}$:

A est l'ensemble des carrés parfaits ;
B est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés parfaits.

Autrement dit, $\mathrm{A} = \left\{a^2, a \in \mathbb{N}\right\}$ et $\mathrm{B} = \left\{a^2 + b^2, (a, b) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

1°) Le nombre 5 appartient-il à A ? à B ? Justifier.

2°) L'ensemble A est-il inclus dans B ? Justifier.

3°) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement.

« Pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de A, on a $x + y \in \mathrm{A}$. »

« Il existe un couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de A tel que $x + y \in \mathrm{A}$. »

VIII.

On rappelle qu'un polyèdre de l'espace est un solide qui possède des sommets et arêtes et qui est limité par des faces polygonales. Par exemple, un pavé droit, un prisme, une pyramide sont des polyèdres.

On admet que, pour tout polyèdre convexe* de l'espace, on a : $S - A + F = 2$ (relation d'Euler-Descartes) où A désigne le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets et F le nombre de faces.

* Un polyèdre convexe est un polyèdre tel que pour tout couple de points appartenant au polyèdre le segment joignant ces deux points est inclus dans le polyèdre.

Partie 1

1°) Vérifier rapidement que la relation d'Euler-Descartes est vérifiée pour un pavé droit.

2°) Soit a, b, c trois entiers naturels non nuls. D'après la relation d'Euler-Descartes, on peut énoncer la propriété suivante :

« S'il existe un polyèdre convexe tel que a soit le nombre de sommets, b le nombre d'arêtes et c le nombre de faces, alors $a - b + c = 2$. »

a) Recopier et compléter la phrase suivante qui reprend la propriété précédente :

« Une condition …. pour qu'il existe …. est … ».

b) Existe-il un polyèdre convexe possédant 10 sommets, 15 arêtes, 8 faces ?
Quelle propriété utilise-t-on comme justification ? Répondre avec précision.

Partie 2

On considère deux polyèdres convexes P et P' de l'espace.

On considère la proposition conditionnelle suivante :

« Si P et P' ont le même nombre d'arêtes et de sommets, alors P et P' ont le même nombre de faces. »

1°) Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? La réciproque de cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

2°) Faire deux phrases : l'une utilisant l'expression « condition nécessaire », l'autre utilisant l'expression « condition suffisante ».

3°) Faire deux phrases : l'une utilisant l'expression « il faut », l'autre utilisant l'expression « il suffit ».

Bonus :

On reprend la suite (u_n) définie dans l'exercice **I**.

Démontrer par un raisonnement de « proche en proche » que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.
Ce résultat avait été admis à la question 1°).

Corrigé du contrôle du 6-6-2014

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) On admet que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n > 0$ (on peut le démontrer par un raisonnement de « proche en proche »).
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Faire une démonstration.

1ère méthode : méthode par différence

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{1+(u_n)^2} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n - (u_n)^3}{1+(u_n)^2} \\ &= -\frac{(u_n)^3}{1+(u_n)^2}\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -(u_n)^3 < 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2e méthode : par quotient car tous les termes de la suite sont strictement positifs

Attention, le calcul de quelques termes ne permet pas de déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) Programmer le calcul des termes de la suite (u_n) sur la calculatrice.
On admet que la suite (u_n) converge.
Quelle semble être la valeur de sa limite ? Répondre sans justifier.

La valeur de la limite de la suite (u_n) semble être 0.

En écriture symbolique, on peut écrire $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

On admet que ce résultat est vrai. On pourra le justifier en Terminale.
Il n'est pas évident de conjecturer cette limite car la convergence est assez lente.

Pour rentrer la suite sur calculatrice TI, on écrit $u(n) = u(n-1)/(1+(u(n-1)\wedge 2))$.

3°) a) Déterminer le plus petit entier naturel *p* tel que $u_p \leqslant 0{,}1$. Répondre sans justifier.
D'après la calculatrice, le plus petit entier naturel *p* tel que $u_p \leqslant 0{,}1$ est 42.

b) On considère la proposition conditionnelle suivante :

$$P : \text{« Si } n \geqslant p \text{, alors } u_n \leqslant 0{,}1 \text{ ».}$$

Recopier la proposition *P* en remplaçant *p* par la valeur déterminée au a).
La proposition *P* est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

$$P : \text{« Si } n \geqslant 42 \text{, alors } u_n \leqslant 0{,}1 \text{ ».}$$

Cette phrase est vraie car la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

II.

Dans cet exercice, on doit donner toutes les formules en « syntaxe tableur ».
On s'appuie sur une syntaxe type « tableur Excel ».

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$ pour tout entier naturel *n*.

	A	B	C
1	*n*	u_n	
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

On répondra sans justifier aux questions suivantes.

On sera particulièrement vigilant sur la syntaxe utilisée lors de l'écriture des formules demandées.

1°) On souhaite réaliser une feuille de calcul sur tableur selon le modèle ci-contre.
Dans la colonne A, on désire mettre les valeurs de *n*.
Dans la colonne B, on désire calculer automatiquement tous les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{24}. Pour cela, on entre dans la cellule B2 la valeur 5 puis on saisit dans la cellule B3 une formule qui sera recopiée vers le bas.
Écrire la formule qu'il faut saisir dans la cellule B3.
Jusqu'à quelle cellule faut-il recopier cette formule ?

On entre la formule « $=(2*\mathrm{B2}+1)/3$ » dans la cellule B3.
Il faut recopier cette formule jusque dans la cellule B26 (il s'agit d'un principe de recopie automatique).

Attention, sur tableur :
- la multiplication est notée $*$ et ce signe est obligatoire dans la formule ;

- la division est notée par une barre oblique /.

2°) Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 afin d'obtenir la somme de tous les termes de u_0 à u_{24} ?

Dans la cellule C2, on saisit la formule « $=\text{SOMME}(\text{B2}:\text{B26})$ ».

Commentaires :

1. La plage de cellule est désignée par deux points et non un point-virgule.

2. Il n'y a pas de formule de sommation applicable ici car la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique. Aussi est-on obligé d'avoir recours à la fonction « SOMME » du tableur.

3. La formule « $=\text{B2}+\text{B3}+\text{B4}+........+\text{B26}$ » (écrire tous les termes sans petits points) est possible mais n'est pas du tout dans l'esprit de l'utilisation d'un tableur.
J'ai trouvé cette formule dans la copie d'un élève. J'aurais dû demander la somme de tous les termes de u_0 à 100 pour ne pas à avoir ce genre de formule !

III.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1).

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

(1) $\Leftrightarrow$ $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{8}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{3\pi}{8}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{S_1=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{8}+k'\pi,\, k'\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Les solutions de (1) qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;2\pi]$ sont : $\frac{\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x=0$ (2).

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

(2) $\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z})$

L'ensemble des solutions de (2) dans $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{S_2=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\, k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Les solutions de (2) qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ sont : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ (3).

Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

(3) $\Leftrightarrow$ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=\frac{13\pi}{12}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{13\pi}{24}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (3) dans $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{S_3=\left\{\frac{5\pi}{24}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{13\pi}{24}+k'\pi,\, k'\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Les solutions de (3) qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ sont : $-\dfrac{19\pi}{24}$; $-\dfrac{11\pi}{24}$; $\dfrac{5\pi}{24}$; $\dfrac{13\pi}{24}$.

$\dfrac{5\pi}{24}-\pi=-\dfrac{19\pi}{24}$; $\dfrac{13\pi}{24}-\pi=-\dfrac{11\pi}{24}$

IV.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $(1+\cos x+\sin x)^2=2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

$$\begin{aligned}(1+\cos x+\sin x)^2&=1^2+\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x+2\sin x+2\cos x\sin x\\&=1+1+2\cos x+2\sin x+2\cos x\sin x\\&=2+2\cos x+2\sin x+2\cos x\sin x\end{aligned}$$

(On a utilisé la formule de développement : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.)

$$\begin{aligned}2(1+\cos x)(1+\sin x)&=2(1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)\\&=2+2\cos x+2\sin x+2\cos x\sin x\end{aligned}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad (1+\cos x+\sin x)^2=2(1+\cos x)(1+\sin x)$.

2°) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x+\sin x=-1$ (E).

(E) $\Leftrightarrow\ 1+\cos x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow\ (1+\cos x+\sin x)^2=0$

$\Leftrightarrow\ 2(1+\cos x)(1+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow\ 1+\cos x=0$ ou $1+\sin x=0$

$\Leftrightarrow\ \cos x=-1$ ou $\sin x=-1$

$$\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l}x=\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi\quad(k'\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{S_3=\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$.

V.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

À tout réel θ on fait correspondre le point M de coordonnées $(\sin\theta\,;\cos 2\theta+2\sin\theta)$.

1°) Démontrer que M appartient à la parabole d'équation Γ d'équation $y=-2x^2+2x+1$.

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{M}}&=\cos 2\theta+2\sin\theta\\&=1-2\sin^2\theta+2\sin\theta\\&=-2{x_{\mathrm{M}}}^2+2x_{\mathrm{M}}+1\end{aligned}$$

Donc M appartient à la parabole d'équation Γ d'équation $y=-2x^2+2x+1$.

2°) Déterminer les coordonnées du sommet S de Γ.

On rappelle que le sommet d'une parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c étant trois réels tels que $a\neq 0$) a pour abscisse $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Le sommet S de Γ a pour abscisse $x_{\mathrm{S}}=\dfrac{1}{2}$.

$$y_{\mathrm{S}}=-2{x_{\mathrm{S}}}^2+2x_{\mathrm{S}}+1=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

$\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$

3°) Quel est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $\mathbb{R}$? Justifier.

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\sin\theta$ décrit l'intervalle [– 1 ; 1].

Donc l'ensemble des points M lorsque θ décrit $\mathbb{R}$ est l'arc de parabole Γ correspondant à $x\in[-1\,;1]$.

4°) Calculer à l'aide de la calculatrice la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine du plan limité par la courbe Γ, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x=1$ et l'axe des abscisses en unité d'aire.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\mathscr{A}=\dfrac{4}{3}$ unité d'aire.

Il est possible de calculer cette aire sans la calculatrice : pour cela, on détermine une primitive F de la fonction $f : x\mapsto -2x^2+2x+1$.

On peut par exemple donner $\mathrm{F} : x\mapsto -\dfrac{2x^3}{3}+x^2+x$.

On calcule $\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)=-\dfrac{2}{3}+1+1-0=\dfrac{4}{3}$.

Comme f est positive sur l'intervalle [0 ; 1], le résultat précédent fournit l'aire en unité d'aire sous la courbe Γ sur l'intervalle [0 ; 1].

VI.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives (1 ; 1), (– 1 ; 1), (– 1 ; – 1), (1 ; – 1). On note E le disque fermé de centre O et de rayon 1.

On commence par faire une figure. Le disque E est à l'intérieur du carré (le disque est tangent à chaque côté).

1°) On choisit 400 points au hasard à l'intérieur du carré ABCD.

a) Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la fréquence f des points situés dans E. Donner les bornes d'abord sous forme fractionnaire puis sous forme décimale.

On rappelle que l'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2.

L'unité d'aire dans un repère orthonormé est l'unité d'aire correspondant à l'unité de longueur choisie.

L'aire du carré ABCD est égale à 4 unités d'aire.
L'aire du disque E est égale à π unités d'aire.

Donc la probabilité qu'un point choisi au hasard à l'intérieur du carré ABCD appartienne au disque E est égale à $p = \dfrac{\mathscr{A}_E}{\mathscr{A}_{\text{ABCD}}} = \dfrac{\pi}{4}$.

On se garde bien d'utiliser une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$.

Pour déterminer un intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la fréquence f des points situés dans E, on utilise la loi binomiale de paramètres 400 (nombre d'épreuves) et $\dfrac{\pi}{4}$ (probabilité d'un succès).

La variable aléatoire qui compte le nombre de points appartenant à E suit cette loi binomiale.

On dresse la table des « probabilité cumulées » grâce à la calculatrice.

On cherche le plus petit entier naturel a tel que $P\left(\text{X} \leqslant a\right) > 0{,}025$.
On cherche le plus petit entier naturel b tel que $P\left(\text{X} \leqslant b\right) \geqslant 0{,}975$.

On trouve $a = 298$ et $b = 330$.

On en déduit que $\text{I} = \left[\dfrac{298}{400} ; \dfrac{330}{400}\right]$ soit $\text{I} = \left[0{,}745 ; 0{,}825\right]$.

b) Calculer l'amplitude de I (donner le résultat sous forme décimale).

L'amplitude de I est : $0{,}825 - 0{,}745 = 0{,}08$.

2°) On considère l'algorithme ci-dessous permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $\left(x ; y\right)$ au hasard à l'intérieur du carré ABCD et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont dans E. Recopier et compléter cet algorithme :

La condition exprimant qu'un point $\text{M}\left(x ; y\right)$ appartient à E est $\text{OM}^2 \leqslant 1$ soit $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
    x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $\left[-1 ; 1\right]$
    y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $\left[-1 ; 1\right]$
    Si $x^2 + y^2 \leqslant 1$
        Alors a prend la valeur $a + 1$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\dfrac{a}{n}$

On peut aisément réaliser le programme correspondant à cet algorithme sur calculatrice.

VII. Logique et ensembles

On rappelle qu'un carré parfait est le carré d'un entier naturel (exemples : 0, 1, 4, 9, 16, 25 …).

On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}$:

A est l'ensemble des carrés parfaits ;
B est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés parfaits.

Autrement dit, $\text{A} = \left\{a^2, a \in \mathbb{N}\right\}$ et $\text{B} = \left\{a^2 + b^2, \left(a, b\right) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

1°) Le nombre 5 appartient-il à A ? à B ? Justifier.

5 n'appartient pas à A.

5 appartient à B car $5 = 1^2 + 2^2$.

2°) L'ensemble A est-il inclus dans B ? Justifier.

L'ensemble A est inclus dans B.
En effet, $a^2 = a^2 + 0^2$.
Tout élément de A s'écrit bien comme somme de deux carrés parfaits.
On peut écrire $\text{A} \subset \text{B}$.

3°) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

« Pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de A, on a $x+y\in \text{A}$. »

Cette proposition est fausse.
On va prendre un contre-exemple : on considère les nombres 4 et 9.
La somme de 4 et 9 est égale à 13.
Or $13\notin \text{A}$.

« Il existe un couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de A tel que $x+y\in \text{A}$. »
Cette proposition est vraie.

En effet, prenons les éléments 0 et 1 de A.
On a : $0+1=1$ qui appartient à A.

Remarque très importante sur le « il existe » :

Il existe d'autres couples pour lesquels la propriété est vraie.
Le « il existe » en mathématiques signifie « il existe au moins un ». Le « un » signifie « au moins un » et pas « exactement un ».
C'est une convention admise de mettre seulement « il existe » et pas « il existe au moins un ».
Donc s'il en existe deux couples vérifiant la condition, la proposition est bien vraie.

Rappel de méthode :

Pour démontrer qu'une proposition avec un « pour tout » est fausse, on utilise un contre-exemple.

Pour démontrer qu'une proposition avec un « il existe » est vraie, on utilise un contre-exemple.

VIII. Logique

On rappelle qu'un polyèdre de l'espace est un solide qui possède des sommets et arêtes et qui est limité par des faces polygonales. Par exemple, un pavé droit, un prisme, une pyramide sont des polyèdres.

On admet que, pour tout polyèdre convexe de l'espace, on a : $S-A+F=2$ (relation d'Euler-Descartes) où A désigne le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets et F le nombre de faces.

Partie 1

1°) Vérifier rapidement que la relation d'Euler-Descartes est vérifiée pour un pavé droit.

Pour un pavé droit, $S=8$, $F=6$ et $A=12$.
On a : $S-A+F=8-12+6=2$
Donc la relation d'Euler-Descartes est vérifiée.

2°) a) Recopier et compléter la phrase suivante qui reprend la propriété précédente :

« Une condition …. pour qu'il existe …. est … ».

Une condition nécessaire pour qu'il existe un polyèdre convexe avec a sommets, b arêtes et c faces est que $a-b+c=2$.

Une condition nécessaire pour qu'il existe un polyèdre convexe tel que a soit le nombre de sommets, b le nombre d'arêtes et c le nombre de faces est que $a-b+c=2$.

b) Existe-il un polyèdre convexe possédant 10 sommets, 15 arêtes, 8 faces ?
Quelle propriété utilise-t-on comme justification ? Répondre avec précision.

On fait un calcul puis on donne une justification.

On a : $10-15+8=3$.
Comme le résultat n'est pas égal à 2, d'après la contraposée de la propriété, il n'existe pas de polyèdre convexe possédant 10 sommets, 15 arêtes, 8 faces.

Partie 2

On considère deux polyèdres convexes P et P' de l'espace.

On considère la proposition conditionnelle suivante :

« Si P et P' ont le même nombre d'arêtes et de sommets, alors P et P' ont le même nombre de faces. »

1°) Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? La réciproque de cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

La proposition est vraie mais sa réciproque est fausse.

2°) Faire deux phrases : l'une utilisant l'expression « condition nécessaire », l'autre utilisant l'expression « condition suffisante ».

Une condition nécessaire pour que P et P' aient le même nombre d'arêtes et de sommets, alors P et P' ont le même nombre de faces.

Une condition suffisante pour que P et P' aient le même nombre de faces est qu'ils aient le même nombre d'arêtes et de sommets.

3°) Faire deux phrases : l'une utilisant l'expression « il faut », l'autre utilisant l'expression « il suffit ».

Pour que P et P' aient le même nombre d'arêtes et de sommets, il faut que P et P' aient le même nombre de faces.

Pour que P et P' aient le même nombre de faces, il suffit qu'ils aient le même nombre d'arêtes et de sommets.

Bonus :

On reprend la suite (u_n) définie dans l'exercice **I**.

Démontrer par un raisonnement de « proche en proche » que pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$.
Ce résultat avait été admis à la question 1°).

Un raisonnement de « proche en proche » consiste à montrer comment une propriété passe d'une étape à l'autre.

Dans ce type de raisonnement :

- on ne fait pas de calcul (ou en tout cas, pas de calcul numérique, uniquement du calcul littéral)

- on procède en deux étapes.

• On commence par dire que $u_0 > 0$ puisque $u_0 = 4$ par définition de la suite (u_n).

• On suppose ensuite que $u_k > 0$ pour un entier naturel k donné.
On démontre alors que $u_{k+1} > 0$.

On utilise la relation de récurrence $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1+(u_k)^2}$.

$u_k > 0$ et $1+(u_k)^2 > 0$ donc $u_{k+1} > 0$ (règle du signe d'un quotient).

Ainsi on peut déduire des deux étapes précédentes que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.