1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 23-5-2014 (45 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : …….. / 20

I. ……… / 4

Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. ……… / 2

Linéariser l'expression $\cos^4 x+\sin^4 x$ (x réel quelconque).

On pourra observer que $\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-$...........

………

………

………

………

………

III. ……… / 2

Démontrer que : $\cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{\cos 2x+\cos 2y}{2}$ (x et y étant deux réels quelconques).

………

………

………

………

………

………

………

Dans les exercices **IV** à **VIII**, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

IV. ……… / 2

Pour tout réel $\theta \in [-\pi\,;\,\pi]$, on note D_θ la droite d'équation cartésienne $2x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$. Répondre sans faire de phrases.

1°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de θ la droite D_θ passe par le point A(1 ; 0).
2°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de θ la droite D_θ passe par le point B(0 ; 1).

1°) ……………………………   2°) ……………………………

V. ……… / 2

Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $(x+y)^2+(x-y)^2=16$. Répondre avec précision en justifiant.

………

………

………

………

………

VI. ……… / 3

On rappelle que si Δ est une droite de coefficient directeur *m*, alors la tangente de l'angle aigu formé par Δ et l'axe des abscisses est égale à $|m|$.

Soit α et β deux réels distincts de l'intervalle $]0\,;90[$ et *a* un réel quelconque non nul.
On note *D* la droite passant par O, de coefficient directeur strictement positif telle que la mesure en degrés de l'angle aigu formé par *D* et l'axe (O*x*) soit égale à α.
On note D' la droite passant par le point $\text{A}(a\,;0)$, de coefficient directeur strictement positif telle que la mesure en degrés de l'angle aigu formé par D' et l'axe (O*x*) soit égale à β.

1°) Déterminer l'équation réduite des droites *D* et D'.

D : ………………………….. D' : …………………………..

2°) Exprimer en fonction de *a*, α et β l'abscisse du point d'intersection I de *D* et D'.

$x_{\text{I}}=$ ....

Application numérique (bonus) :

On prend $a=4$, $\alpha=50$ et $\beta=70$.

$x_{\text{I}}\approx$ .... (valeur arrondie au centième)

VII. ……… / 3

On note I, J, A les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 1) et K le milieu de [AI].

1°) On choisit 400 points au hasard à l'intérieur du carré OIAJ.

Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil de 90 % de la fréquence des points situés à l'intérieur du triangle OIK. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

…………………………………………….

2°) On désire réaliser un algorithme permettant d'entrer un entier naturel $n\geqslant 1$, de choisir *n* points de coordonnées $(x\,;y)$ au hasard à l'intérieur du carré OIAJ et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont situés à l'intérieur du triangle OIK. Compléter l'algorithme ci-dessous :

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 1 à *n* **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  Si ………………………….
    Alors *a* prend la valeur …………
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……

VIII. ……… / 2

Soir *R* un réel strictement positif. On note $\mathcal{C}$ le demi-cercle de centre O et de rayon *R* situé dans le demi-plan fermé au-dessus de l'axe des abscisses. On désire réaliser un algorithme qui permette de hachurer le demi-disque fermé limité par $\mathcal{C}$ à l'aide de hachures horizontales régulièrement espacées. On compte le segment joignant les points de coordonnées $(-R\,;0)$ et $(R\,;0)$ parmi les hachures.
Compléter l'algorithme ci-dessous. La valeur de *n* saisie en entrée correspond au nombre de hachures souhaité ; *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
h prend la valeur $\dfrac{R}{n}$

Traitement et sorties :
Pour *k* entier naturel allant de 0 à $n-1$ **Faire**
  Tracer le segment joignant les points de coordonnées (……..… ; ……..…) et (……..… ; ……..…)
FinPour

Corrigé du contrôle du 23-5-2014

I.

Calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\times\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\times\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{9\pi}{12}-\dfrac{4\pi}{12}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}$.

II.

Linéariser l'expression $\cos^4 x+\sin^4 x$ (x réel quelconque).
On pourra observer que $\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-$............

$$\begin{aligned}\cos^4 x+\sin^4 x&=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x &&(1)\\&=1-2\left(\cos x\sin x\right)^2 &&(2)\\&=1-2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 &&(3)\\&=1-\frac{\sin^2 2x}{2}\\&=1-\frac{\frac{1-\cos 4x}{2}}{2}\\&=1-\frac{1-\cos 4x}{4}\\&=\frac{3+\cos 4x}{4}\end{aligned}$$

Une forme linéarisée ne doit comporter ni de puissance ni de produit.

Justification des lignes (1), (2), (3) :

• Pour la ligne (1) :

On développe $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2$ avec l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

On obtient : $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\left(\cos^2 x\right)^2+\left(\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\times\sin^2 x$ soit
$\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x$.

En transposant $2\cos^2 x\sin^2 x$ dans le premier membre de l'égalité, on obtient :
$\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x$.

• Pour la ligne (2) :

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ pour tout réel x (relation fondamentale de trigonométrie)

• Pour la ligne (3) :

La formule de duplication du sinus donne $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$ donc $\sin x\times\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$.

III.

Démontrer que : $\cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{\cos 2x+\cos 2y}{2}$ (x et y étant deux réels quelconques).

$$\begin{aligned}\cos^2 x-\sin^2 y&=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2y}{2}\\&=\frac{1+\cos 2x-1+\cos 2y}{2}\\&=\frac{\cos 2x+\cos 2y}{2}\end{aligned}$$

Dans les exercices **IV** à **VIII**, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

IV.

Pour tout réel $\theta\in[-\pi\,;\pi]$, on note D_θ la droite d'équation cartésienne $2x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$. Répondre sans faire de phrases.

1°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de θ la droite D_θ passe par le point A(1 ; 0).
2°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de θ la droite D_θ passe par le point B(0 ; 1).

1°) $\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}$

2°) $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\in D_\theta &\Leftrightarrow 2\times 1\times\cos\theta+0\times\sin\theta-1=0\\ &\Leftrightarrow 2\cos\theta-1=0\\ &\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}\ \text{ ou }\ \theta=-\frac{\pi}{3}\quad (\text{car } \theta\in[-\pi\,;\pi])\end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, on utilise un cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}\in D_\theta &\Leftrightarrow 2\times 0\times\cos\theta+1\times\sin\theta-1=0\\ &\Leftrightarrow \sin\theta=1\\ &\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\quad (\text{car } \theta\in[-\pi\,;\pi])\end{aligned}$$

V.

Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $(x+y)^2+(x-y)^2=16$. Répondre avec précision en justifiant.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathcal{C} &\Leftrightarrow (x+y)^2+(x-y)^2=16\\ &\Leftrightarrow x^2\cancel{+2xy}+y^2+x^2+y^2\cancel{-2xy}=16\\ &\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=16\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2=8\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

VI.

On rappelle que si Δ est une droite de coefficient directeur m, alors la tangente de l'angle aigu formé par Δ et l'axe des abscisses est égale à $|\,m\,|$.

Soit α et β deux réels distincts de l'intervalle $]0\,;90[$ et a un réel quelconque non nul.
On note D la droite passant par O, de coefficient directeur strictement positif telle que la mesure en degrés de l'angle aigu formé par D et l'axe (Ox) soit égale à α.
On note D' la droite passant par le point $\mathrm{A}(a\,;0)$, de coefficient directeur strictement positif telle que la mesure en degrés de l'angle aigu formé par D' et l'axe (Ox) soit égale à β.

Faire un graphique avant de commencer à répondre aux questions.

1°) Déterminer l'équation réduite des droites D et D'.

$D:\ y=(\tan\alpha°)\,x$

$D':\ y=(\tan\beta°)(x-a)$

Le coefficient directeur de D est positif donc il est égal à $\tan\alpha°$.

Le coefficient directeur de D' est positif donc il est égal à $\tan\beta°$.

On utilise ensuite le résultat suivant du cours sur les équations de droites.

La droite D passant par un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et de coefficient directeur m a pour équation $y=m(x-x_\mathrm{A})+y_\mathrm{A}$.

2°) Exprimer en fonction de a, α et β l'abscisse du point d'intersection I de D et D'.

$$x_\mathrm{I}=\frac{a\tan\beta°}{\tan\beta°-\tan\alpha°}$$

L'abscisse de I est la solution de l'équation $(\tan\alpha°)\,x=(\tan\beta°)(x-a)\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow x\times\tan\alpha°=x\times\tan\beta°-a\times\tan\beta°$

$\Leftrightarrow x\times\tan\beta°-x\times\tan\alpha°=a\times\tan\beta°$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a\tan\beta°}{\tan\beta°-\tan\alpha°}$ (car α et β appartiennent tous les deux à l'intervalle $]0\,;90[$ et $\alpha\neq\beta$ donc $\tan\alpha°\neq\tan\beta°$)

Application numérique :

On prend $a=4$, $\alpha=50$ et $\beta=70$.

Avec la calculatrice (en mode degré), on obtient $x_\mathrm{I}=7{,}06417777...$

$x_\mathrm{I}\approx 7{,}06$ (valeur arrondie au centième)

On peut tracer les droites sur l'écran de la calculatrice et vérifier la réponse graphiquement.

VII.

On note I, J, A les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 1) et K le milieu de [AI].

Faire un graphique avant de commencer à répondre aux questions.

1°) On choisit 400 points au hasard à l'intérieur du carré OIAJ.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil de 90 % de la fréquence des points situés à l'intérieur du triangle OIK. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

$$\left[\frac{86}{400} ; \frac{114}{400}\right]$$

On utilise la loi binomiale de paramètres 400 et $\frac{1}{4}$.

2°) On désire réaliser un algorithme permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $(x ; y)$ au hasard à l'intérieur du carré OIAJ et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont situés à l'intérieur du triangle OIK. Compléter l'algorithme ci-dessous :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
    x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
    y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
    Si $y \leqslant \frac{x}{2}$
        Alors a prend la valeur $a+1$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\frac{a}{n}$

Il est tout à fait possible de programmer cet algorithme sur calculatrice (l'énoncé ne demandait cependant pas de le faire).

VIII.

Soir R un réel strictement positif. On note $\mathcal{C}$ le demi-cercle de centre O et de rayon R situé dans le demi-plan fermé au-dessus de l'axe des abscisses. On désire réaliser un algorithme qui permette de hachurer le demi-disque fermé limité par $\mathcal{C}$ à l'aide de hachures horizontales régulièrement espacées. On compte le segment joignant les points de coordonnées $(-R ; 0)$ et $(R ; 0)$ parmi les hachures.
Compléter l'algorithme ci-dessous. La valeur de n saisie en entrée correspond au nombre de hachures souhaité ; n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
h prend la valeur $\frac{R}{n}$

Traitement et sorties :
Pour k entier naturel allant de 0 à $n-1$ **Faire**
    Tracer le segment joignant les points de coordonnées $\left(\sqrt{R^2-(kh)^2} ; kh\right)$ et $\left(-\sqrt{R^2-(kh)^2} ; kh\right)$
FinPour

Faire un graphique avant de commencer à répondre aux questions.

Explication détaillée pour montrer comment on trouve les abscisses des points :

Le cercle Γ de centre O et de rayon R a pour équation $(x-0)^2+(y-0)^2=R^2$ soit $x^2+y^2=R^2$.

Soit k un entier naturel tel que 0 à $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
On a alors $0 \leqslant kh \leqslant R\frac{n-1}{n}$ (car $h=\frac{R}{n}$) d'où $0 \leqslant kh \leqslant R$ (car $\frac{n-1}{n} \leqslant 1$).

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée kh sont les solutions de l'équation $x^2+(kh)^2=R^2$ (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2=R^2-(kh)^2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{R^2-(kh)^2}$ ou $x=-\sqrt{R^2-(kh)^2}$ (on a précisé auparavant que $0 \leqslant kh \leqslant R$ d'où $R^2-(kh)^2$)