TS1

Contrôle du jeudi 22 mai 2014 (50 minutes)

I. (5 points)

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.
Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.
Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.
Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle ? Justifier la réponse.

II. (8 points)

Lors d'une enquête, une question est posée et trois réponses possibles, notées A, B et C, sont proposées.
La bonne réponse est la A.
On note r la probabilité pour qu'une personne connaisse la bonne réponse. Toute personne connaissant la bonne réponse répond A, sinon elle répond au hasard (de façon équiprobable).

1°) On interroge une personne au hasard. On note p la probabilité qu'elle choisisse la réponse A.

Donner les réponses des questions a) et b) sans justifier.
On donnera les résultats sous forme simplifiée.

a) Exprimer p en fonction de r.
b) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie la réponse A connaisse la bonne réponse.

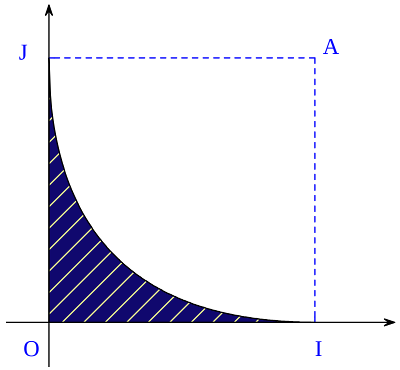
2°) Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on constate lors de ce sondage que 240 personnes répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au niveau de 95 % de l'estimation de p. On utilisera la formule « simplifiée ».

En déduire un intervalle de confiance au niveau de 95 % de r.

III. (7 points)

1°) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Cette courbe a pour extrémités I et J.
Calculer l'aire du domaine D limité par $\mathcal{C}$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (il s'agit du triangle mixtiligne $\overset{\frown}{\text{OIJ}}$).



2°) On choisit 500 points au hasard à l'intérieur du carré OIAJ où A désigne le point de coordonnées (1 ; 1).

Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des points appartenant au domaine D. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

3°) On désire réaliser un algorithme permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $(x\,;\,y)$ au hasard à l'intérieur du carré OIAJ et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont situés dans D. On admet que D est caractérisé par l'inéquation $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1$.
Recopier et compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  Si ....
    Alors a prend la valeur ....
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ......

Corrigé du contrôle du 22-5-2014

I.

On raisonne avec les intervalles de fluctuations (car il s'agit d'un problème de prise de décision sur échantillon). On fait une hypothèse sur la proportion dans la population ce qui nous permet de déterminer un intervalle de fluctuation à un seuil donné et on regarde si la fréquence observée appartient ou non à cet intervalle).

Ici, nous allons nous fixer un seuil de fluctuation de 95 % (on pourrait travailler avec d'autres seuils, le tout est de bien le mettre en évidence dans la solution).

L'effectif étudié est de $n = 200$ personnes (supérieur à 30).

Selon l'entreprise, la proportion d'adhérents ayant dépassé 20 journées d'absences est $p = 0,22$ (hypothèse).

$np = 44$ donc $np > 5$

$n(1-p) = 156$ donc $n(1-p) > 5$

On peut donc déterminer un intervalle I de fluctuation asymptotique simplifié au seuil de 95 % de la fréquence d'adhérents ayant dépassé 29 journées d'absences :

$$\mathrm{I} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,1492...$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,2907...$$

La fréquence observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{28}{200} = 0,14$.

$f \notin \mathrm{I}$ donc on rejette la déclaration au seuil de 5 % d'erreur.

Remarque :

Avec la formule plus précise de l'intervalle de fluctuation asymptotique (utilisant la valeur 1,96), les bornes sont 0,163 et 0,277 à 10^{-3} près. Cela ne change rien à la conclusion.

II.

1°) On utilise un arbre de probabilités.

a) $p = r + \dfrac{1}{3}(1-r) = \dfrac{2r+1}{3}$

On donne le résultat sous la forme d'un seul quotient.

b) La probabilité que l'individu connaisse la bonne réponse sachant qu'il a répondu A est égale à $\dfrac{r}{p} = \dfrac{r}{\frac{2r+1}{3}} = \dfrac{3r}{2r+1}$.

On donne le résultat sous la forme d'un seul quotient.

2°) La fréquence de personnes ayant répondu A est $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$.

Un intervalle de confiance de p au niveau de 95 % est donc $\mathrm{I} = \left[0,6 - \dfrac{1}{\sqrt{400}} \,;\, 0,6 + \dfrac{1}{\sqrt{400}} \right] = [0,55\,;\,0,65]$.

$$\begin{aligned}
0,55 \leqslant p \leqslant 0,65 &\Leftrightarrow 0,55 \leqslant \frac{2r+1}{3} \leqslant 0,65 \\
&\Leftrightarrow 3 \times 0,55 \leqslant 2r+1 \leqslant 3 \times 0,65 \\
&\Leftrightarrow \frac{3 \times 0,55 - 1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{3 \times 0,65 - 1}{2} \\
&\Leftrightarrow 0,325 \leqslant r \leqslant 0,475
\end{aligned}$$

Un intervalle de confiance au niveau 95 % de r est : [0,325 ; 0,475].

III.

1°) On prend deux réels quelconques x et y dans l'intervalle [0 ; 1].

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \\
&\Leftrightarrow y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2
\end{aligned}$$

On calcule $L = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \, \mathrm{d}x$.

$$L=\int_0^1\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\ \mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2\times\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1$$

$$=-\frac{5}{6}+1$$

$$=\frac{1}{6}$$

On vérifie aisément ce résultat à l'aide de la calculatrice.

L'aire du domaine D est égale à $\frac{1}{6}$ u. a. .

2°)

$$\left[\frac{67}{500}\,;\frac{100}{500}\right]$$

3°)

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
  Si $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1$
    Alors a prend la valeur $a+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\frac{a}{n}$