Problème

Estimation du nombre moyen de diviseurs d'un nombre

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante : « Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une valeur approchée à 1 près de la moyenne du nombre de diviseurs des entiers compris entre 2 et n est $\ln n$ ».
c'est-à-dire que la moyenne du nombre de diviseurs des entiers compris entre 2 et n est comprise entre $\ln n - 1$ et $\ln n + 1$.

Pour tout couple $(i\,;j)$ d'entiers naturels, on pose $\delta_{i,j} = 1$ si i divise j et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.

$\mathrm{E}(a)$ représente la partie entière d'un réel a.

1°) Vérifier cette propriété pour $n = 10$.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

2°) Que représente le nombre $\mathrm{d}(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,n}$?

3°) Soit i un entier naturel non nul.

a) Que représente $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}$? En déduire que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} = \mathrm{E}\left(\frac{n}{i}\right)$.

b) Démontrer à l'aide du résultat précédent et de la question 2°) que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}(j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{i}\right)$.

c) En déduire que l'on a : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}(j) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

4°) a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

En déduire que l'on a : $\displaystyle\ln n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \ln n + 1$.

b) Démontrer la propriété annoncée.