TS1

Contrôle du lundi 28 avril 2014 (4 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

• On rédigera sur des copies séparées l'enseignement obligatoire et l'enseignement de spécialité.

• On accordera une attention tout particulière au soin et à la rédaction ; en particulier, on encadrera tous les résultats demandés en rouge à la règle.

Enseignement obligatoire (note sur 20)

I. (4 points)

Une entreprise fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme. L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les **parties A** et **B** sont indépendantes.

On donnera les approximations décimales obtenues par arrondi automatique à la quatrième décimale sauf pour la question 1°) de la **partie A** où l'on donnera la valeur exacte.

Aucun détail des calculs n'est demandé sur la copie. On remplira directement le tableau sur la feuille de réponses jointe au sujet (sans écrire d'égalités).

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.

1°) Calculer la probabilité que le petit pot soit conforme.

2°) Déterminer la probabilité que le petit pot provienne de la chaîne F_1 sachant qu'il est conforme.

Partie B

1°) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.

Calculer la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2°) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre. On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 0{,}17$ et d'écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,98.

Déterminer σ_2.

II. (4 points)

Aucune figure n'est demandée sur la copie dans cet exercice.

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note A et B les points d'affixes respectives – 1 et 1.

À tout point M de *P*, distinct de A, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

On note Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

Soit M un point quelconque de Γ d'affixe *z*. On note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$.

1°) Démontrer que l'on a : $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1$ (on commencera par préciser le module et un argument du nombre complexe $z+1$).

2°) Démontrer que l'on a : $z' = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. En déduire que M' appartient à un cercle Γ' dont on définira le centre et le rayon.

3°) On note N le point d'affixe $-\overline{z}$. Démontrer que M' est le milieu de [BN].

III. (5 points)

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère la droite *D* définie le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$ et le plan *P* défini

par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 6 - 3\lambda - 2\mu \end{cases} \quad \left(\left(\lambda, \mu\right) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On donne également les points $\mathrm{A}\left(3\,;1\,;1\right)$ et $\mathrm{B}\left(5\,;1\,;4\right)$.

On note *D'* la droite qui passe A et a pour vecteur directeur $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Dire sans justifier si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

Compléter le tableau sur la feuille de réponses jointe au sujet.

Barème : + 1 point si la réponse est juste ; – 1 point si la réponse est fausse.

Affirmation 1 : Le point B appartient à *P*.

Affirmation 2 : La droite *D* est parallèle au plan *P*.

Affirmation 3 : La droite *D* est incluse dans le plan *P*.

Affirmation 4 : Les droites *D* et *D'* sont parallèles.

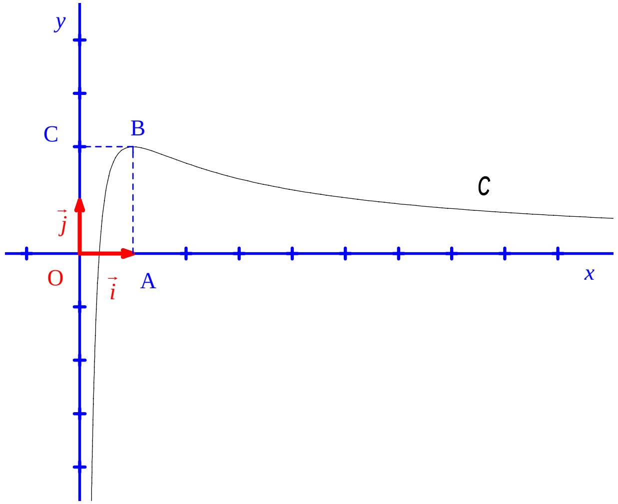
Affirmation 5 : Les droites *D* et *D'* sont sécantes.

IV. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a+b\ln x}{x}$ où a et b sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Elle est donnée sur le graphique ci-dessous pour lequel on dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B.



1°) Déterminer les réels a et b en expliquant la démarche.

2°) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$ (en détaillant chaque fois).

3°) Dresser un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.
Mettre les limites ainsi que les valeurs des extremums.

4°) a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ (E) admet deux solutions distinctes α et β (on suppose que $\alpha < \beta$).

b) Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$ (méthode au choix).
On donnera le résultat sans explication.

5°) On donne l'algorithme ci-contre.

Variables :
a, b et m sont des nombres réels.

Initialisations :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $b-a>0{,}1$ **Faire**
   m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
   Si $f(m)<1$
      alors a prend la valeur m
      Sinon b prend la valeur m
   FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a
Afficher b

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

a) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ? Répondre de manière précise.

b) Comment faut-il modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-1} ?
Rédiger complètement le nouvel algorithme (dans un cadre écrit sur une seule et même page).

6°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

Enseignement de spécialité (note sur 20)

I. (10 points)

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.
Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

• Si un internaute est sur la page N°1, alors il ira, soit sur la page N°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page N°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

• Si un internaute est sur la page N°2, alors, soit il ira sur la page N°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page N°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page N°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

• Si un internaute est sur la page N°3, alors, soit il ira sur la page N°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page N°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page N°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel *n*, on définit les événements et les probabilités suivants :

A_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page N°1 » et on note $a_n = P(\mathrm{A}_n)$.

B_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page N°2 » et on note $b_n = P(\mathrm{B}_n)$.

C_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page N°3 » et on note $c_n = P(\mathrm{C}_n)$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

1°) Déterminer sans expliquer la matrice M telle que pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n$.

2°) On admet que pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel *n* non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de *n*, a_0, b_0, c_0 (donner les réponses sans détailler les calculs).
En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera ; on ne détaillera que le calcul de la limite de (a_n).

3°) Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

II. (10 points)

1°) Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :
S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
M : « l'individu est malade et infecté ».
Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

On note $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} s_n \\ i_n \\ m_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade au bout de *n* semaines.

On a alors $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}99 \\ 0 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. Aucun détail n'est demandé sur la copie.
On arrondira les coefficients au centième.

2°) La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population. L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $\mathrm{Q}_n = \begin{pmatrix} S_n \\ I_n \\ M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade au bout de *n* semaines après la vaccination.
D'après la question 1°), $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{P}_4$.

a) Déterminer le réel *k* tel que $\mathrm{A}^2 = k\mathrm{J}$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, $\mathrm{A}^n = \mathrm{A}^2$.

b) Que peut-on dire de la matrice Q_n pour $n \geqslant 2$? Justifier.

c) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

TS1

Feuille à remettre dans la copie

Nom : ……………………………….

Prénom : …………………………..……

Obligatoire (sur 20)

I	II	III	IV

I. (4 points)

Partie A		
	1°)	
	2°)	

Partie B		
	1°)	
	2°)	

III. (5 points)

Affirmation 1	Affirmation 2	Affirmation 3	Affirmation 4	Affirmation 5	Total

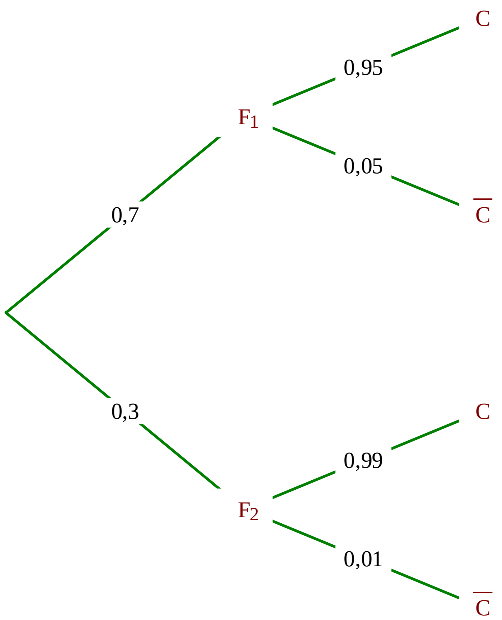
Spécialité (sur 20)

I	II

Corrigé du contrôle du 28-4-2014

I.

Partie 1



1°)

$P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{C}) + P(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{C}) = 0,962$

2°) $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{F}_1) = \dfrac{P(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{C})}{P(\mathrm{C})} = \dfrac{0,665}{0,962} \approx 0,6912$ (valeur arrondie à la quatrième décimale)

Partie 2

1°) $P(0,16 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0,18) \approx 0,904$

2°)

$$P(0,16 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 0,18) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma_2} \leqslant \frac{\mathrm{Y}-0,17}{\sigma_2} \leqslant \frac{0,1}{\sigma_2}\right) = 0,98$$

On pose $\mathrm{Y}^* = \dfrac{\mathrm{Y}-0,17}{\sigma_2}$.

Y^* suit la loi normale centrée réduite.

$$2P\left(\mathrm{Y}^* \leqslant \frac{0,1}{\sigma_2}\right) - 1 = 0,98$$

$$P\left(\mathrm{Y}^* \leqslant \frac{0,1}{\sigma_2}\right) = 0,99$$

Rappel de propriété du cours (qui résulte de la symétrie de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$) :

a désigne un réel strictement positif et X est une variable aléatoire qui suite la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

$$P(-a \leqslant \mathrm{X} \leqslant a) = 2P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant a) = 2\big(P(\mathrm{X} \leqslant a) - 0,5\big) = 2P(\mathrm{X} \leqslant a) - 1$$

Donc $\dfrac{0,1}{\sigma_2} = u$ d'où $\sigma_2 = \dfrac{0,1}{u}$.

On utilise la calculatrice.

On trouve $\sigma_2 = 0,042985832...$.

II.

> On n'utilise pas du tout l'écriture algébrique d'un nombre complexe dans cet exercice.
>
> L'exercice ne le disait pas. C'était à l'élève de s'en rendre compte.

1°) Démontrer que l'on a : $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1$ (on commencera par préciser le module et un argument du nombre complexe $z+1$).

$\mathrm{M} \in \Gamma$ donc $\mathrm{AM} = 2$ soit $|z+1| = 2$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \theta \quad (2\pi)$ donc $\arg(z+1) = \theta \quad (2\pi)$.

$z+1$ a pour module 2 et pour argument θ donc $z+1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Par suite, $z = -1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2°) Démontrer que l'on a : $z' = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. En déduire que M' appartient à un cercle Γ' dont on définira le centre et le rayon.

$$z' = \frac{z-1}{z+1} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 2}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$|z'-1| = |-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}| = 1$ donc $\mathrm{M}' \in \Gamma'$ où Γ' est le cercle de centre A et de rayon 1.

3°) On note N le point d'affixe $-\bar{z}$. Démontrer que M' est le milieu de [BN].

$$z_{\mathrm{N}} = -\bar{z} = -\overline{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1\right)} = -\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1\right) = 1 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$\frac{z_B + z_N}{2} = \frac{1+1-2e^{-i\theta}}{2} = 1 - e^{-i\theta} = z_{M'}$$

On en déduit que M' est le milieu de [BN].

III.

Affirmation 1	Affirmation 2	Affirmation 3	Affirmation 4	Affirmation 5
F	V	F	F	V

Affirmation 1 : Le point B appartient à *P*.

On cherche s'il existe des réels λ et μ tels que l'on ait $\begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \\ 6 - 3\lambda - 2\mu = 4 \end{cases}$.

On a $6 - 3 \times 5 - 2 \times 1 = -11$.
Donc $B \notin P$.

Affirmation 2 : La droite *D* est parallèle au plan *P*.

D'après les équations paramétriques données :

- la droite *D* a pour repère $\left(B, \vec{u}\right)$ avec $\vec{u}\left(-2\,;3\,;0\right)$;
- le plan *P* a pour repère $\left(C, \vec{v}, \vec{w}\right)$ avec C(0 ; 0 ; 6), $\vec{v}\left(1\,;0\,;-3\right)$ et $\vec{w}\left(0\,;1\,;-2\right)$ (on vérifie de manière immédiate que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires).

On cherche si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires c'est-à-dire s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \alpha \times 1 + \beta \times 0 \\ 3 = \alpha \times 0 + \beta \times 1 \\ 0 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \alpha \\ 3 = \beta \\ 0 = 0 \end{cases}$.

On a : $\vec{u} = -2\vec{v} + 3\vec{w}$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, et par suite, *D* // *P*.

Affirmation 3 : La droite *D* est incluse dans le plan *P*.

$B \in D$ mais $B \notin P$ (affirmation 1) donc $D \not\subset P$.

Affirmation 4 : Les droites *D* et *D'* sont parallèles.

D a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(-2\,;3\,;4\right)$.
D' a pour vecteur directeur $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\left(2\,;-1\,;2\right)$.

Les deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc *D* et *D'* ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Les droites *D* et *D'* sont sécantes.

D' a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si les droites *D* et *D'* sont sécantes, on cherche à résoudre le système $\begin{cases} 5 - 2t = 3 + 2t' \\ 1 + 3t = 1 - t' \\ 4 = 1 + 2t' \end{cases}$.

La résolution des deux premières équations donne $t = -\frac{1}{2}$ et $t' = \frac{3}{2}$.
La troisième équation est bien vérifiée.

IV.

1°) Déterminer les réels *a* et *b* en expliquant la démarche.

La fonction *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle, la fonction intervenant au dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1 \times \left(a + b\ln x\right)}{x^2}$$

$$= \frac{b - a - b\ln x}{x^2}$$

D'après l'énoncé, $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$.

Donc $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

On a donc $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$.

2°) Déterminer les limites de *f* en 0^+ et en $+\infty$ (en détaillant chaque fois).

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 + 2\ln x\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$

Par limite d'un quotient, on a donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[\quad f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\ln x}{x} = 0$

Par limite de somme, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3°) Dresser un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction *f*.
Mettre les limites ainsi que les valeurs des extremums.

$\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[\quad f'(x) = -\dfrac{2\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $-2\ln x$		$+$	0	$-$	
Signe de x^2	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de *f*	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

4°) a) Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ (E) admet deux solutions distinctes α et β (on suppose que $\alpha < \beta$).

• *f* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]0 ; 1\right]$.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$
$1 \in \left[2 ; +\infty\right[$ donc d'après le corollaire du TVI (forme généralisée), l'équation (E) admet une unique solution dans $\left]0 ; 1\right]$.

• *f* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[1 ; +\infty\right[$.
De plus, $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
$1 \in \left]0 ; 2\right]$ donc d'après le corollaire du TVI (forme généralisée), l'équation (E) admet une unique solution dans $\left[1 ; +\infty\right[$.

Comme $f(1) = 2$, 1 n'est pas solution de (E).

On en conclut que l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'entier *n* tel que $n < \beta < n+1$.

Avec la calculatrice, on trouve :
$f(5) = 1{,}0438...$
$f(6) = 0{,}93059....$

Donc $5 < \alpha < 6$.
Par suite, l'entier cherché est $n = 5$.

On peut vérifier la réponse sur le graphique donné dans l'énoncé.

5°) On donne l'algorithme ci-contre.

Variables :
a, *b* et *m* sont des nombres réels.

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $b - a > 0{,}1$ **Faire**
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m) < 1$
    alors *a* prend la valeur *m*
    Sinon *b* prend la valeur *m*
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher *a*
Afficher *b*

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

a) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ? Répondre de manière précise.

Les valeurs affichées en sortie par cet algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.

b) Comment faut-il modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-1} ?
Rédiger complètement le nouvel algorithme (dans un cadre écrit sur une seule et même page).

Variables :
a, b et m sont des nombres réels.

Initialisation :
a prend la valeur 5
b prend la valeur 6

Traitement :
Tantque $b-a>0{,}1$ **Faire**
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m)>1$
    alors a prend la valeur m
    Sinon b prend la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a
Afficher b

Attention dans le nouvel algorithme à bien mettre la condition « $f(m)>1$ » pour tenir compte de la décroissance de f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

6°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{OABC}} &= \text{OA}\times\text{OC}\\ &=1\times 2\\ &=2 \text{ u. a.}\end{aligned}$$

Cherchons l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

On résout l'équation $f(x)=0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2+2\ln x=0\\ &\Leftrightarrow \ln x=-1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On calcule l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$.

Comme $\forall x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right] \quad f(x)\geqslant 0$ (vérification par le calcul très facile), l'aire sous la courbe est donnée par $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$ par l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$.

On calcule

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{2+2\ln x}{x}\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 2\times\frac{1}{x}\times(1+\ln x)\ \mathrm{d}x\\ &= \left[(1+\ln x)^2\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\\ &= 1-(1-1)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$ est égale à 1 unité d'aire.

On constate que cette aire est égale à la moitié de l'aire du rectangle OABC.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

Corrigé de l'enseignement de spécialité

I.

On peut représenter la situation par un graphe probabiliste.

1°) Déterminer sans expliquer la matrice M telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n$.

$$M^n=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

2°) On admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$M^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n (donner les réponses sans détailler les calculs).

$$U_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases}a_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)a_0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0\\ b_n=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0+\frac{1}{4}c_0\\ c_n=\left(\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)a_0+\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0+\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{3}\left(a_0+b_0+c_0\right)+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(2a_0-b_0-c_0\right)\\ b_n=\frac{1}{4}\left(a_0+b_0+c_0\right)\\ c_n=\frac{5}{12}\left(a_0+b_0+c_0\right)+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-2a_0+b_0+c_0\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(2a_0-b_0-c_0\right)\\ b_n=\frac{1}{4} \qquad\qquad \text{car } a_0+b_0+c_0=1\\ c_n=\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-2a_0+b_0+c_0\right)\end{cases}$$

En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera ; on ne détaillera que le calcul de la limite de (a_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<-\frac{1}{2}<1$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{a_0+b_0+c_0}{3}=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{5}{12}$

3°) Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

À long terme, on aura la répartition suivante :

Site 1 : environ 33 % ;
Site 2 : 25 % ;
Site 3 : environ 42 %.

II.

1°) On peut commencer par faire un graphe probabiliste pour représenter la situation.

En l'absence d'indications de l'énoncé (et de manière logique), on suppose que les malades restent malades et que les porteurs sains restent sains avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

$s_{n+1}=\frac{1}{3}s_n$

$i_{n+1}=\frac{1}{2}i_n+\frac{1}{3}s_n$

$m_{n+1}=m_n+\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}i_n$

La matrice de transition en colonnes est donnée par : $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

$P_0=\begin{pmatrix}0,99\\ 0\\ 0,01\end{pmatrix}$

On a : $P_4=B^4P_0$.

La matrice constituée des valeurs arrondies au centième des coefficients de P_4 est $\begin{pmatrix}0,01\\ 0,10\\ 0,89\end{pmatrix}$.

2°) La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population. L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n=\begin{pmatrix}S_n\\ I_n\\ M_n\end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la *n*-ième semaine après la vaccination.
D'après la question 1°), $Q_0=P_4$.

a) Déterminer le réel *k* tel que $A^2=kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, $A^n=A^2$.

$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

On en déduit que $A^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

On a donc $A^2=\frac{1}{3}J$.

b) Que peut-on dire de la matrice Q_n pour $n\geqslant 2$? Justifier.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad Q_n=A^nQ_0$

Donc $\forall n\geqslant 2\quad Q_n=\frac{1}{3}JQ_0$.

D'où $Q_n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_0\\ I_0\\ M_0\end{pmatrix}$

D'où $S_n=\frac{S_0+I_0+M_0}{3}=\frac{1}{3}$, $I_n=\frac{S_0+I_0+M_0}{3}=\frac{1}{3}$, $M_n=\frac{S_0+I_0+M_0}{3}=\frac{1}{3}$ car $S_0+I_0+M_0=1$.

c) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Au bout de la 2^e^ étape, les proportions d'individus dans chaque catégories deviennent constantes, toutes égales à $\frac{1}{3}$.
On ne peut donc espérer éradiquer la maladie avec le vaccin.