Schéma de Horner

Introduction :

Le mot « schéma » a un sens difficile à établir. Il n'est pas à prendre sous le sens de figure, dessin, …
Il s'agit plutôt d'un algorithme.

Le mathématicien William George Horner (1786-1837) a inventé une méthode de calcul rapide de l'image d'un nombre par une fonction polynôme de degré quelconque.

I. Principe

1°) Exemple

On considère le polynôme $P(x)=3x^3-5x^2-x+2$ (polynôme du 3^e degré).

a) On va procéder à une réécriture par factorisations partielles par x :

$$\begin{aligned}P(x)&=3x^3-5x^2-x+2\\&=\left(3x^3-5x^2\right)-x+2\\&=(3x-5)x^2-x+2\\&=\left[(3x-5)x-1\right]x+2\end{aligned}$$

b) Nous allons prendre un exemple numérique permettant de montrer comment utiliser cette réécriture pour calculer l'image d'un nombre donné par *P*.

Nous allons par exemple calculer $P(-2)$.

$$\begin{aligned}P(-2)&=\left[\left(3\times(-2)-5\right)\times(-2)-1\right]\times(-2)+2\\&=\left[(-6-5)\times(-2)-1\right]\times(-2)+2\\&=(22-1)\times(-2)+2\\&=21\times(-2)+2\\&=-42+2\\&=-40\end{aligned}$$

3

$\times(-2)$

-6

$-5=-11$

$\times(-2)$

22

$-1=21$

$\times(-2)$

-42

$+2=-40$

2°) Commentaires

Cette méthode est très rapide, est économe en calcul (on évite de calculer des puissances ce qui permet de faire les calculs mentalement) et offre l'avantage d'effectuer des calculs de la gauche vers la droite.
Elle présente donc un grand intérêt pratique. Elle présente également un très grand intérêt en informatique où le nombre d'opérations à effectuer doit être le plus petit possible (cet intérêt ne sera pas détaillé cette année).

II. Une présentation commode

Nous allons voir à présent une présentation très commode en tableau des calculs qui donnera en plus un résultat supplémentaire très intéressant (cf. **III**).

1°) Exemple 1

$P(x)=3x^3-5x^2-x+2$

Calculer $P(-2)$ avec le schéma de Horner.

Sur la première ligne du tableau, on écrit les coefficients du polynôme ordonnés selon les puissances décroissantes.

Coefficients du polynôme	3	-5	-1	2
Résultats	3	22	-42	$P(-2)=-40$

On redescend toujours le premier coefficient.
Une flèche oblique représente une multiplication par – 2.
Une flèche verticale représente une addition.

2°) Exemple 2

$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Calculer $P(1)$ avec le schéma de Horner.

Coefficients du polynôme	1	– 2	– 1	2
Résultats	1	– 1	– 2	0

Donc $P(1) = 0$.

Ainsi, 1 est une racine du polynôme (c'est même une racine évidente).

Cette présentation est adoptée dans les pays anglo-saxons.

III. Application aux factorisations

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à la factorisation d'un polynôme dont on connaît une racine.

1°) Théorème (admis sans démonstration)

Soit $P(x)$ un polynôme.
Si α est une racine de $P(x)$ c'est-à-dire : $P(\alpha) = 0$, alors $P(x)$ se factorise par $x - \alpha$ ce qui signifie que
$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré égal à celui de $P(x)$ – 1.

2°) Commentaire

Il s'agit d'un théorème fondamental de factorisations du polynôme.

En pratique, on obtient les coefficients de $Q(x)$ grâce aux nombres de la deuxième ligne du tableau de Horner.
Le tableau nous permet d'obtenir une factorisation du polynôme.

3°) Exemple (reprise de l'exemple 2 du II)

$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

On avait vu grâce au schéma de Horner que $P(1) = 0$.

Grâce aux résultats obtenus sur la deuxième ligne, on peut écrire :

$$P(x) = (x-1)(1x^2 - 1x - 2)$$

Les coefficients marqués en rouge sont les nombres de la deuxième ligne du tableau.

4°) Cas général

Dans le cas général, le schéma de Horner fournit un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + P(\alpha)$.

Exemple reprise de l'exemple 1 du II (cas où $P(\alpha) \neq 0$) **:**

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 2$

On s'était intéressé à $P(-2)$.

Coefficients du polynôme	3	– 5	– 1	2
Résultats	3	22	– 42	$P(-2) = -40$

On peut écrire : $P(x) = (x+2)(3x^2 - 11x + 21) - 40$.

Il s'agit d'un cas particulier de division euclidienne d'un polynôme.

IV. Une application intéressante

1. Exemples

a) $P(x) = x^2 - 1$

On utilise la racine 1 (racine évidente).

1	0	– 1
1	1	0

$P(x) = (x+1) \times (x-1)$

b) $P(x) = x^3 - 1$

1	0	0	– 1
1	1	1	0

$P(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

c) $P(x) = x^4 - 1$

1	0	0	0	-1
1	1	1	1	0

$P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

d) $P(x) = x^5 - 1$

$P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

2. Généralisation

$n \in \mathbb{N}^*$

Nous allons factoriser $P(x) = x^n - 1$ grâce à la méthode de Horner.

1 est une racine évidente du polynôme.

$(n-1)$ "0"

1	0	0	0	…	0	-1
1	1	1	1	…	1	0

Ainsi pour $P(x) = x^n - 1$, on obtient $P(x) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

Formule très importante à retenir.

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$

On peut retrouver cette formule en développant le second membre.
Cela clôt le cours sur le schéma de Horner.

Exercices :

Enoncés

1 On considère le polynôme $P(x)=2x^4-5x^3+2x-3$.
Calculer $P(3)$ à l'aide du schéma de Horner.

2 On considère le polynôme $P(x)=x^4-18x^2+32$.
Calculer $P(4)$ à l'aide du schéma de Horner.

3 On considère le polynôme $P(x)=-2x^3-3x^2+5x-6$.

Calculer $P(2)$ et donner une factorisation de $P(x)$.

4 On considère le polynôme $P(x)=-x^3+6x^2-5x-12$.

Calculer $P(3)$ et donner une factorisation de $P(x)$.

Solutions

1

Coefficients du polynôme	2	– 5	0	2	– 3
Résultats	2	1	3	11	30

$P(3)=30$

= multiplié par 3 = addition

2

On écrit $P(x)=1x^4+0x^3-18x^2+0x+32$.

Coefficients du polynôme	1	0	– 18	0	32
Résultats	1	4	– 2	– 8	0

Ainsi on obtient $P(4)=0$.

3

Coefficients du polynôme	– 2	3	5	– 6
Résultats	– 2	– 1	3	0

$P(2)=0$

$P(x)=(x-2)\left(-2x^2-x-3\right)$

$\boxed{4}$

Coefficients du polynôme	– 1	6	– 5	– 12
Résultats	– 1	3	4	0

$P(3) = 0$

$P(x) = (x-3)\left(-x^2+3x+4\right)$