$1^{\text{ère}}$ S1

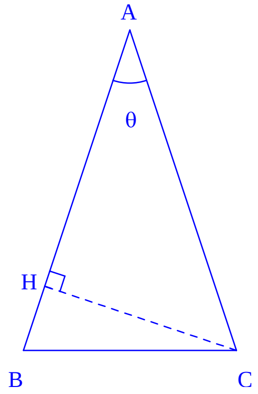
Contrôle du vendredi 4-4-2014 (30 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (2 points)

On considère la figure ci-contre où ABC est un triangle isocèle en A.
On note H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
On pose $AB = AC = a$ et $\widehat{BAC} = \theta$ rad.
Ne rien écrire sur la figure.



Exprimer BH en fonction de a et de θ (expression simple).

BH = ………………………………

II. (5 points)

On considère une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. On sait que $u_6 = 20$ et que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$.
Calculer u_0 et la raison r de la suite (u_n).

III. (4 points : 1 point + 1 point + 2 points)

Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise. De 50 000 € au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 20 % (il s'agit donc d'une diminution d'un mois à l'autre). On note u_1 le capital en euros injecté le premier mois ($u_1 = 50000$), u_2 le capital en euros injecté le deuxième mois,…, u_n le capital en euros injecté le n-ième mois ($n \in \mathbb{N}^*$).

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

……………………………………………………. (une seule égalité)

2°) Déterminer la nature de la suite (u_n). Répondre avec précision.

3°) Calculer la somme S des capitaux en euros injectés durant 3 ans. On arrondira le résultat à l'unité.

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

1°) On considère l'algorithme ci-contre.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

> **Entrée :**
> Saisir n (entier naturel)
>
> **Initialisation :**
> u prend la valeur – 3
>
> **Traitement :**
> **Pour** i allant de 0 à n **Faire**
> u prend la valeur $u+2$
> **FinPour**
>
> **Sortie :**
> Afficher u

Exprimer la valeur de la variable u affichée en sortie en fonction de la valeur de n saisie en entrée.

…………………………………… (une seule expression sans égalité)

2°) On a modifié l'algorithme précédent.
Il n'est pas demandé de programmer ce nouvel algorithme sur la calculatrice.

> **Entrée :**
> Saisir n (entier naturel)
>
> **Initialisation :**
> u prend la valeur – 3
> S prend la valeur 0
>
> **Traitement :**
> **Pour** i allant de 0 à n **Faire**
> S prend la valeur $S+u$
> u prend la valeur $u+2$
> **FinPour**
>
> **Sortie :**
> Afficher u
> Afficher S

Exprimer la valeur de la variable S affichée en sortie en fonction de l'entier n dont la valeur est saisie en entrée.

…………………………………… (une seule expression sans égalité)

V. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{2^n}{3^{n+2}-4\times 3^n}$.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier et répondre avec précision (présenter tous les calculs nécessaires).

……

……

……

……

VI. (2 points)

Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$. On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan, associe le point $\mathrm{M}'(x'\,;y')$ avec $x'=x^2$ et $y'=y^2$. Le point M' est appelé l'image de M par f. Par exemple, le point $\mathrm{A}(-2\,;3)$ a pour image le point $\mathrm{A}'(4\,;9)$, le point $\mathrm{B}(-1\,;-1)$ a pour image le point $\mathrm{B}'(1\,;1)$ etc. On cherche les points invariants par f. On donne ci-dessous le début de la recherche.
Compléter la dernière équivalence et faire une phrase réponse (suggestion de rédaction : « Les points invariants par f sont les points de coordonnées ………………….. »).

Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

M est invariant par $f \Leftrightarrow \mathrm{M}'=\mathrm{M}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x \\ y^2=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y(y-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ y=0 \quad \text{ou} \quad y-1=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

……

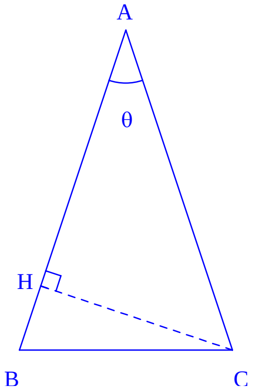
……

Bonus : Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit l'axe des abscisses ?

Corrigé du contrôle du 4-4-2014

I.

On considère la figure ci-contre où ABC est un triangle isocèle en A.
On note H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
On pose $AB = AC = a$ et $\widehat{BAC} = \theta$ rad.
Ne rien écrire sur la figure.



Exprimer BH en fonction de a et de θ (expression simple).

$BH = a(1-\cos\theta)$

Toujours penser à l'homogénéité d'une longueur.
J'ai trouvé dans plusieurs copies la formule $BH = a - \dfrac{\cos\theta}{a}$, formule dont on peut déclarer qu'elle est fausse par simple analyse dimensionnelle.

Dans le triangle AHC rectangle en C, on a : $AH = a\cos\theta$.

Donc $BH = AB - AH = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta)$.

II.

On considère une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. On sait que $u_6 = 20$ et que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$.
Calculer u_0 et la raison r de la suite (u_n).

On a : $u_6 = 20$ donc $u_0 + 6r = 20 \quad (1)$.

On a : $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ donc $u_0 + 2r + u_0 + 3r + u_0 + 4r = 15$ soit $3u_0 + 9r = 15 \quad (2)$.

On résout le système formé par les équations (1) et (2).

On obtient $r = 5$ et $u_0 = -10$.

Il y a d'autres méthodes possibles.

III.

Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise. De 50 000 € au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 20 % (il s'agit donc d'une diminution d'un mois à l'autre). On note u_1 le capital en euros injecté le premier mois ($u_1 = 50000$), u_2 le capital en euros injecté le deuxième mois,…, u_n le capital en euros injecté le n-ième mois ($n \in \mathbb{N}^*$).

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$u_{n+1} = 0{,}8u_n$ (une seule égalité)

Attention, ce n'est pas 20 % de 50 000 mais 20 % du « résultat » à chaque fois.

2°) Déterminer la nature de la suite (u_n). Répondre avec précision.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 50000$ et de raison $q = 0{,}8$.

3°) Calculer la somme S des capitaux en euros injectés durant 3 ans. On arrondira le résultat à l'unité.

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{36}$

$S = 50000 \times \dfrac{1-0{,}8^{36}}{1-0{,}8}$

$S \approx 249\,919$ (valeur arrondie à l'unité)

IV.

1°) On considère l'algorithme ci-contre.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel)

Initialisation :
u prend la valeur -3

Traitement :
Pour i allant de 0 à n **Faire**
  u prend la valeur $u+2$
FinPour

Sortie :
Afficher u

Exprimer la valeur de la variable u affichée en sortie en fonction de la valeur de n saisie en entrée.

$2n-1$ (une seule expression sans égalité)

Pour trouver la réponse, il faut penser aux suites.

L'algorithme calcule les termes de la suite arithmétique (a_n) de premier terme $a_0 = -3$ et de raison 2.

Plus précisément, pour une valeur de n saisie en entrée, la valeur de u affichée en sortie correspond à la valeur de a_{n+1}.

On a : $a_{n+1}=2(n+1)-3=2n-1$.

À titre de vérification, on peut faire tourner l'algorithme « à la main » pour la valeur de $n=3$ saisie en entrée comme le montre le tableau suivant d'évolution des variables.

i		0	1	2	3
u	– 3	– 1	1	3	5

D'accord. En fait, je résonnais en omettant la valeur d'initialisation (– 3). Du coup, je commençais à compter véritablement à partir de a(1). Mais alors comment peut-on savoir à partir de quel indice "compter" ?

D'autre part, je voulais savoir si vous mettrez des algorithmes avec des boucles "Pour" et des constructions géométriques.

D'accord. En fait, je résonnais en omettant la valeur d'initialisation (– 3). Du coup, je commençais à compter véritablement à partir de a(1). Mais alors comment peut-on savoir à partir de quel indice "compter" ?

D'autre part, je voulais savoir si vous mettrez des algorithmes avec des boucles "Pour" et des constructions géométriques.

2°) On a modifié l'algorithme précédent.
Il n'est pas demandé de programmer ce nouvel algorithme sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel)

Initialisation :
u prend la valeur – 3
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 0 à n **Faire**
    S prend la valeur $S+u$
    u prend la valeur $u+2$
FinPour

Sortie :
Afficher u
Afficher S

Exprimer la valeur de la variable S affichée en sortie en fonction de l'entier n dont la valeur est saisie en entrée.

$$a_0+a_1+...+a_n=(n+1)\times\frac{a_0+a_n}{2}=(n+1)\times\frac{-3+2n-3}{2}=(n+1)\times(n-3)$$

(une seule expression sans égalité)

À titre de vérification, on peut faire tourner l'algorithme « à la main » pour la valeur de $n=3$ saisie en entrée comme le montre le tableau suivant d'évolution des variables.

i		0	1	2	3
S	0	– 3	– 4	– 3	0
u	– 3	– 1	1	3	5

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{2^n}{3^{n+2}-4\times3^n}$.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier et répondre avec précision (présenter tous les calculs nécessaires).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{2^n}{3^n\times3^2-4\times3^n}$$

$$=\frac{2^n}{3^n\times(9-4)}$$

$$=\frac{2^n}{5\times3^n}$$

$$=\frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{5}$ et de raison $q=\frac{2}{3}$.

VI.

Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $M(x\,;y)$ du plan, associe le point $M'(x'\,;y')$ avec $x'=x^2$ et $y'=y^2$. Le point M' est appelé l'image de M par f. Par exemple, le point $A(-2\,;3)$ a pour image le point $A'(4\,;9)$, le point $B(-1\,;-1)$ a pour image le point $B'(1\,;1)$ etc. On cherche les points invariants par f. On donne ci-dessous le début de la recherche.
Compléter la dernière équivalence et faire une phrase réponse (suggestion de rédaction : « Les points invariants par f sont les points de coordonnées ………………….. »).

Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan.

M est invariant par $f \Leftrightarrow \mathrm{M}' = \mathrm{M}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ y^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1 \end{cases}$$

Les points invariants par *f* sont les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 1), (0 ; 1) et (1 ; 0).

Bonus : Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit l'axe des abscisses ?

Lorsque M décrit l'axe des abscisses, le point M' décrit la demi-droite [O*x*).

En effet, soit M un point quelconque de l'axe des abscisses. M a pour coordonnées $(x\,;0)$.
Donc M' a alors pour coordonnées $(x^2\,;0)$.
Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, x^2 décrit $[0\,;+\infty[$.
Donc M' décrit la demi-droite [O*x*).