Problème

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentant la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle, puis d'étudier la configuration obtenue.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'unité graphique étant le centimètre.

On note :

Γ et $\mathcal{C}$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \ln x$;
T_a la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse a, a étant un réel.
D_b est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse b, b étant un réel strictement positif.

Partie A

Dans cette partie, on cherche à quelle condition une droite tangente à la courbe Γ est également tangente à la courbe $\mathcal{C}$.

1°) Déterminer une équation des droites T_a et D_b.

2°) Démontrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si $b = \mathrm{e}^{-a}$ et $(a+1)\mathrm{e}^{-a} = a-1$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$ (1).

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\mathrm{e}^x$.

1°) a) Démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $f(x) = 1$ (2).
b) Étudier les variations de f sur l'intervalle I = $[0\ ;+\infty[$ et la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
c) Démontrer que l'équation (2) admet, dans I, une solution unique μ.
Déterminer l'encadrement de μ par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

2°) a) Pour tout nombre réel x, différent de 1 et de − 1, calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.
b) Déduire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.
c) Déterminer les tangentes communes aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.
d) Sur un graphique, placer le repère orthonormé et tracer les courbes Γ et $\mathcal{C}$. On rappelle que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Tracer également les tangentes communes T_{μ} et $T_{-\mu}$.

Partie C

Étude géométrique du problème

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y), y non nul, associe le point M′ de coordonnées (x', y') avec $x' = -x$ et $y' = \frac{1}{y}$.

1°) Déterminer $S(\mathrm{M}')$.
Démontrer que, si le point M appartient à la courbe Γ, alors le point M′ appartient aussi à la courbe Γ.

2°) Soit A le point d'abscisse μ (μ étant le réel défini à la partie B 1°) c) de la courbe Γ ; T_μ, est donc tangente à la courbe Γ au point A et tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse $-\mu$.
a) Déterminer en fonction de μ les coordonnées de $\mathrm{A}' = S(\mathrm{A})$.
b) Vérifier que la droite $T_{-\mu}$ est tangente à la courbe Γ au point A′ et qu'elle est aussi tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en un point B_1, dont on donnera les coordonnées en fonction de μ. Compléter le graphique en plaçant les points A, B_1, A′ et B.

3°) a) Justifier les coordonnées suivantes :

$\mathrm{A}\left(\mu, \frac{\mu+1}{\mu-1}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{B}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}, -\mu\right)$ $\qquad$ $\mathrm{A}'\left(-\mu, \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{B}_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}, \mu\right)$.

b) En déduire que les droites T_μ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Déterminer la nature du quadrilatère $\mathrm{A}\,\mathrm{B}_1\,\mathrm{B}\,\mathrm{A}'$.

4°) Démontrer que l'aire du domaine limité par le segment [AA′] et l'arc de la courbe Γ d'extrémités A et A′ est égale à 2μ. On admettra que cet arc est situé en dessous du segment [AA′].