Problème

Dans cet exercice on se propose de démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ est convergente et déterminer sa limite.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle monotone ?

2°)

a) Pour tout entier naturel *k*, on pose $I_k = (-1)^k \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x$.

Démontrer que l'on a : $u_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$.

b) Démontrer que l'on a : $\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \left(1+(-x)+(-x)^2+\ldots+(-x)^n\right) \mathrm{d}x$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x$.

3°)

a) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x$.

b) On pose $J_n = \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x$. Établir que $|u_n - \ln 2| = |J_n|$.

c) Démontrer que l'on a : $|J_n| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x$.

4°)

a) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $|u_n - \ln 2| \leqslant \int_0^1 x^{n+1} \, \mathrm{d}x$.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^{n+1} \, \mathrm{d}x$ puis sa limite pour *n* tendant vers $+\infty$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.