1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 28-3-2014 (30 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..…………

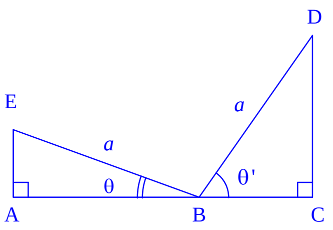
Note : …….. **/ 20**

Il est demandé de ne rien écrire sur les figures.

I. (3 points)

On considère la figure ci-contre où :

- les points A, B, C sont alignés ;
- les triangles ABE et BCD sont rectangles respectivement en A et C ;
- $\widehat{\text{EBA}} = \theta$ rad ;
- $\widehat{\text{CBD}} = \theta'$ rad ;
- $\text{BE} = \text{BD} = a$.



Exprimer DE en fonction de a, θ et θ' (expression simple).

DE = ………………………………

II. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 - n + 1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ (inutile de vérifier les calculs).

On donne également le tableau de signe du polynôme $-x^2 - x + 1$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$		$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$		$+\infty$
Signe de $-x^2 - x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

À l'aide de ces deux résultats, établir le sens de variation de la suite (u_n).

On formulera la phrase de conclusion sous la forme : « La suite (u_n) est … à partir de l'indice … ».

Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser ?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

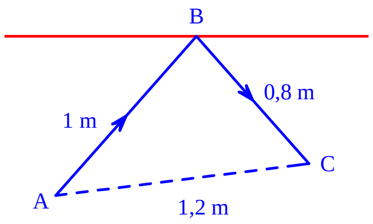
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 5$ et $u_1 = -2$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel n.

« Rentrer » la suite (u_n) sur la calculatrice. Donner la valeur de u_{41}.

$u_{41} =$ ………………………………………………… (écrire tous les chiffres)

IV. (5 points)

Une boule de billard initialement placée en A vient frapper le bord du billard en B, puis s'immobilise en C.
Calculer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$.



……..

……..

……..

……..

……..

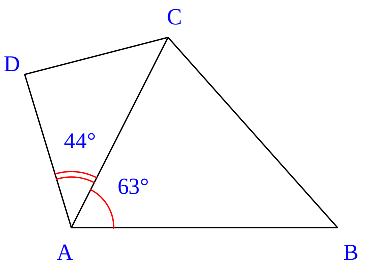
……..

……..

La valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ est égale à ………………………… .

V. (4 points)

On considère la figure ci-dessous. On donne $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $\widehat{BAC} = 63°$ et $\widehat{CAD} = 44°$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du quadrilatère ABCD (valeur exacte puis valeur arrondie au centième).



$\mathcal{A}$ = ……………………………………………………………………………………………… (valeur exacte)

$\mathcal{A}$ ≈ …………………… (valeur arrondie au centième)

VI. (1 point)

On considère un polynôme non nul $P(x)$ de degré n.

Exprimer en fonction de n le degré du polynôme $Q(x) = (x^2+1)P(x)$.

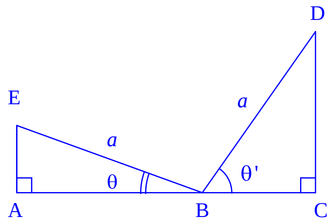
$\deg\left[Q(x)\right] = $ ………………

Corrigé du contrôle du 28-3-2014

I. (3 points)

On considère la figure ci-contre où :

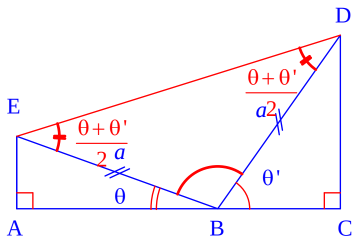
- les points A, B, C sont alignés ;
- les triangles ABE et BCD sont rectangles respectivement en A et C ;
- $\widehat{\text{EBA}} = \theta$ rad ;
- $\widehat{\text{CBD}} = \theta'$ rad ;
- $\text{BE} = \text{BD} = a$.



Exprimer DE en fonction de a, θ et θ' (expression simple).

$$\text{DE} = 2a\cos\frac{\theta+\theta'}{2}$$

On trace le segment [DE].



On considère le triangle BDE.

Par hypothèse, $\text{BE} = \text{BD} = a$ donc le triangle BDE est isocèle en B.

On a : $\widehat{\text{DBE}} = \pi - (\theta + \theta')$.

Donc les angles à la base $\widehat{\text{DEB}}$ et $\widehat{\text{EDB}}$ mesurent chacun $\dfrac{\theta+\theta'}{2}$ rad.

On en déduit que $\text{DE} = 2a\cos\dfrac{\theta+\theta'}{2}$ (cf. contrôle du 21-3-2014).

On pourrait aussi utiliser la formule du côté. L'expression obtenue est néanmoins plus compliquée et nous n'avons pas les moyens actuellement de la simplifier.

II. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 - n + 1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ (inutile de vérifier les calculs).

On donne également le tableau de signe du polynôme $-x^2 - x + 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$+\infty$
Signe de $-x^2 - x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

À l'aide de ces deux résultats, établir le sens de variation de la suite (u_n).

On formulera la phrase de conclusion sous la forme : « La suite (u_n) est … à partir de l'indice … ».

Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser ?

On utilise la méthode du signe de la différence.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 - n + 1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n+1)^2(n+2)^2 > 0$

D'après le tableau de signe, $\forall x \in \left]\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,;+\infty\right[\qquad -x^2 - x + 1 < 0$.

Or $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618033988...$

Le plus petit entier naturel supérieur à $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ est donc 1.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad -n^2 - n + 1 < 0$.

Par suite, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

On le vérifie aisément grâce à la calculatrice.

On aurait aussi pu utiliser la méthode par étude de fonction ;

Attention : pas de tableau de variation de suite ni de dérivée de suite.

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 5$ et $u_1 = -2$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel *n*.

« Rentrer » la suite (u_n) sur la calculatrice. Donner la valeur de u_{41}.

$$u_{41} = 180\ 510\ 993 \text{ (écrire tous les chiffres)}$$

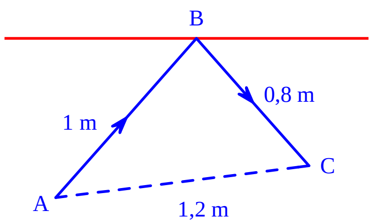
Il s'agit d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 2.
On rentre :

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = \text{u}(n-1) + \text{u}(n-2)$
$\text{u}(n\text{Min}) = \{-2, 5\}$

Dans le tableau de valeurs fourni par la calculatrice, on lit une valeur approchée sous la forme d'une écriture scientifique.
On doit se déplacer dans la colonne pour permettre de voir la valeur exacte en bas de l'écran.

IV. (5 points)

Une boule de billard initialement placée en A vient frapper le bord du billard en B, puis s'immobilise en C.
Calculer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$.



D'après la formule du côté (« théorème de Pythagore généralisé ») dans le triangle ABC, on a :

$1{,}2^2 = 1^2 + 0{,}8^2 - 2 \times 1 \times 0{,}8 \times \cos \widehat{\text{ABC}}$ soit $1{,}44 = 1{,}64 - 1{,}6 \times \cos \widehat{\text{ABC}}$.
Donc $\cos \widehat{\text{ABC}} = \dfrac{0{,}2}{1{,}6}$ d'où $\cos \widehat{\text{ABC}} = \dfrac{1}{8}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{\text{ABC}} = 82{,}8192442...°$.

On n'écrit pas $\widehat{\text{ABC}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{8}\right)$ (notation de calculatrice que l'on n'emploie pas à l'écrit).

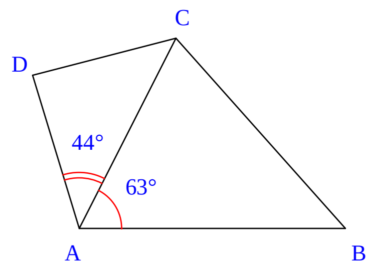
Donc $\widehat{\text{ABC}} \approx 82{,}8°$ (valeur arrondie au dixième).

La valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ est égale à 82,8.

On peut vérifier sur la figure de l'énoncé (qui est à l'échelle).

V. (4 points)

On considère la figure ci-dessous. On donne $\text{AB} = 5$ cm, $\text{AC} = 4$ cm, $\text{AD} = 3$ cm, $\widehat{\text{BAC}} = 63°$ et $\widehat{\text{CAD}} = 44°$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du quadrilatère ABCD (valeur exacte puis valeur arrondie au centième).



$$\mathcal{A} = 10 \times \sin 63° + 6 \times \sin 44° \text{ (valeur exacte)}$$

$$\mathcal{A} \approx 13{,}08 \text{ (valeur arrondie au centième)}$$

VI. (1 point)

On considère un polynôme non nul $P(x)$ de degré *n*.

Exprimer en fonction de *n* le degré du polynôme $Q(x) = (x^2 + 1)P(x)$.

$$\deg[Q(x)] = n + 2$$