TS

Devoir d'approfondissement

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n. Ainsi, $E_n = \{1 ; 2 ; 3 ; ... ; n\}$.

Dans ce problème, on s'intéresse aux sous-ensembles A de E_n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$:

« Si k appartient à A, alors $k+1$ et $k+2$ n'appartiennent pas à A » (k désigne un entier naturel)

Exemple :

Dans E_9, on vérifie aisément que les sous-ensembles $\mathrm{A}_1 = \{1 ;\ 4 ;\ 8\}$, $\mathrm{A}_2 = \{2 ;\ 5\}$, $\mathrm{A}_3 = \{1\}$ vérifient la propriété $\mathscr{P}$.

On notera que, dans chaque ensemble E_n, :

- il y a plusieurs sous-ensembles A qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$;

- les singletons sont des sous-ensembles qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$;

- l'ensemble vide est un sous-ensemble qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

On rappelle également que l'ordre des éléments n'a pas d'importance dans l'écriture d'un ensemble fini en extension : par exemple, {1 ; 3 ; 8}, {8 ; 1 ; 3}, {3 ; 8 ; 1} désignent le même ensemble.

1°) Dans cette question, on prend $n = 11$.

Donner sans justifier un sous-ensemble A de E_{11}, de cardinal 3, vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ et contenant les éléments 3 et 7.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini désigne le nombre d'éléments de cet ensemble.

2°) On donne ci-dessous les sous-ensembles de E_1, E_2, E_3 vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

- Pour $n = 1$, $E_1 = \{1\}$. Les sous-ensembles de E_1 vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ sont $\varnothing$ et {1}.

- Pour $n = 2$, $E_2 = \{1 ; 2\}$. Les sous-ensembles de E_2 vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ sont $\varnothing$, {1}, {2}.

- Pour $n = 3$, $E_3 = \{1 ; 2 ; 3\}$. Les sous-ensembles de E_3 vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ sont $\varnothing$, {1}, {2}, {3}.

On notera que l'on ne met pas d'accolades autour de l'ensemble vide.

On prend $n=4$ (ainsi : $E_4=\{1\,;2\,;3\,;4\}$). Écrire tous les sous-ensembles de E_4 vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.
Faire de même pour E_5.

3°) On note t_n le nombre de sous-ensembles de E_n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Donner les valeurs de t_1, t_2, t_3, t_4, t_5.

4°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $t_{n+3}=t_n+t_{n+2}$ $\quad(\mathscr{R})$.

Indication : considérer les sous-ensembles de E_{n+3} qui contiennent 1 et celles qui ne contiennent pas 1.

5°) À l'aide de cette relation ($\mathscr{R}$), calculer t_6 et t_7.

6°) On admet qu'il n'existe pas de formule explicite pour t_n (inutile donc d'en chercher une).

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} t_n \\ t_{n+1} \\ t_{n+2} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on ait $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n$.

b) Déterminer t_{20} et t_{40} à l'aide de la calculatrice.

Rappels de vocabulaire :

• On peut employer indifféremment les mots « sous-ensemble » ou « partie ».
Ces deux mots sont synonymes.

• On appelle singleton un ensemble constitué d'un seul élément.

Corrigé

1°) $\mathrm{A} = \{3\,;7\,;10\}$ ou $\mathrm{A} = \{3\,;7\,;11\}$

2°)

Pour E_4 :

$\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1 ; 4}

Pour E_5 :

$\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {1 ; 5}, {1 ; 4}, {2 ; 5}

3°)

$t_1 = 2$

$t_2 = 3$

$t_3 = 4$

$t_4 = 6$

$t_5 = 9$

4°) On n'utilise pas de récurrence.

5°)

$t_6 = t_3 + t_5 = 4 + 9 = 13$

$t_7 = t_4 + t_6 = 6 + 13 = 19$

6°)

a) $\mathrm{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_{n+2} \\ t_{n+3} \end{pmatrix}$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_n \\ t_{n+1} \\ t_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_{n+2} \\ t_n + t_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_{n+2} \\ t_{n+3} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = A^{n-1}U_1$

$$U_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$U_{20} = A^{19}U_1 = \begin{pmatrix} 277 & 189 & 406 \\ 406 & 277 & 595 \\ 595 & 406 & 872 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2745 \\ 4023 \\ 5896 \end{pmatrix}$$

Or $U_{20} = \begin{pmatrix} t_{20} \\ t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix}$.

Donc $t_{20} = 2745$.