TS

Devoir d'approfondissement

Version 1

1°) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=(1+x)\mathrm{e}^{x}+1$.

Étudier les variations de φ ; en déduire que pour tout réel *x*, on a $\varphi(x)>0$.

2°) On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Démontrer que *f* est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de *f* en 0 (à gauche et à droite). Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
c) Déterminer les limites de *f* en + ∞ et – ∞.
d) Calculer $f'(x)$.
e) Dresser le tableau de variations de *f*.
f) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ pour asymptote oblique en + ∞ et – ∞.
g) Tracer $\mathcal{C}$. On prendra 4 cm ou 4 grands carreaux pour unité graphique.

Version 2

1°) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$.

Faire une étude complète de la fonction φ (dérivée, sens de variation, limites aux bornes). En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a : $\varphi(x)>0$.

2°) On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Démontrer que *f* est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de *f* en 0 (à gauche et à droite). Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
c) Déterminer les limites de *f* en + ∞ et – ∞.
d) Calculer $f'(x)$.
e) Dresser le tableau de variations de *f*.
f) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ pour asymptote oblique en + ∞ et – ∞.
g) Tracer $\mathcal{C}$. On prendra 4 cm ou 4 grands carreaux pour unité graphique.