$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 28 mars 2014

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note E_n l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à *n*.
Ainsi, $E_n = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,...\,;\,n\}$.

Dans ce problème, on s'intéresse aux sous-ensembles A de E_n vérifiant la propriété ***P*** :

« Si *k* appartient à A, alors *k* + 1 et *k* + 2 n'appartiennent pas à A » (*k* désigne un entier naturel)

Exemple :

Dans E_9, on vérifie aisément que les sous-ensembles $\text{A}_1 = \{1\,;\,4\,;\,8\}$, $\text{A}_2 = \{2\,;\,5\}$, $\text{A}_3 = \{1\}$ vérifient la propriété ***P***.

On notera que, dans chaque ensemble E_n, :

- il y a plusieurs sous-ensembles A qui vérifient la propriété ***P*** ;

- les singletons sont des sous-ensembles qui vérifient la propriété ***P*** ;

- l'ensemble vide est un sous-ensemble qui vérifie la propriété ***P***.

On rappelle également que l'ordre des éléments n'a pas d'importance dans l'écriture d'un ensemble fini en extension : par exemple, {1 ; 3 ; 8}, {8 ; 1 ; 3}, {3 ; 8 ; 1} désignent le même ensemble.

1°) Dans cette question, on prend $n = 11$.

Donner sans justifier un sous-ensemble A de E_{11}, de cardinal 3, vérifiant la propriété ***P*** et contenant les éléments 3 et 7.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini désigne le nombre d'éléments de cet ensemble.

2°) On donne ci-dessous les sous-ensembles de E_1, E_2, E_3 vérifiant la propriété ***P***.

- Pour $n = 1$, $E_1 = \{1\}$. Les sous-ensembles de E_1 vérifiant la propriété ***P*** sont ∅ et {1}.

- Pour $n = 2$, $E_2 = \{1\,;\,2\}$. Les sous-ensembles de E_2 vérifiant la propriété ***P*** sont ∅, {1}, {2}.

- Pour $n = 3$, $E_3 = \{1\,;\,2\,;\,3\}$. Les sous-ensembles de E_3 vérifiant la propriété ***P*** sont ∅, {1}, {2}, {3}.

On notera que l'on ne met pas d'accolades autour de l'ensemble vide.

On prend $n = 4$ (ainsi : $E_4 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$). Écrire tous les sous-ensembles de E_4 vérifiant la propriété ***P***.
Écrire la liste des parties sur une seule ligne sans leurs donner de noms.

Faire de même pour E_5.

3°) On note t_n le nombre de parties de E_n vérifiant la propriété ***P***.

Donner les valeurs de t_1, t_2, t_3, t_4, t_5.

4°) On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$ (***R***).
À l'aide de cette relation, calculer t_6 et t_7.

5°) On admet qu'il n'existe pas de formule explicite pour t_n (inutile donc d'en chercher une).

On se propose d'effectuer à l'aide d'un tableur le calcul itératif des termes de la suite (t_n) connaissant les trois premiers termes et la relation de récurrence (***R***).

Remplir sur ordinateur une feuille de calcul permettant de mettre les indices dans la colonne A et de mettre le calcul des termes dans la colonne B. Il n'est pas demandé d'imprimer ni de recopier sur copie cette feuille de calcul.

À l'aide de cette feuille de calcul, déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ pour lequel le nombre de parties de E_n vérifiant la propriété ***P*** est supérieur ou égal à 1000.