TS spécialité

Contrôle du jeudi 20 mars 2014 (50 min)

Prénom : …………………………………… Nom : …………………………………… **/20**

I. (1 point)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \ln a & 3\ln\left(a^2\right)-\ln a \\ \ln\dfrac{1}{a} & \ln\sqrt{a} \end{pmatrix}$ où a est un réel strictement positif.

Donner la matrice B telle que $\mathrm{A}=(\ln a)\mathrm{B}$.

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

II. (3 points)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ où a est un réel fixé.

Démontrer que $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}$.

………

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2.

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2°) Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

………

………

………

………

………

………

………

IV. (1 point)

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À tout point M(x ; y) du plan, on associe le point $\mathrm{M}'\left(x' ; y'\right)$ tel que $x'=2x-y$ et $y'=x+y$.

Déterminer une matrice A telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

V. (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n \end{cases}$.

1°) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2°) Compléter l'égalité $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3°) En déduire u_8 et v_8 à l'aide de la calculatrice.

$u_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $v_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VI. (8 points)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer P^{-1} à l'aide de la calculatrice.

$$\mathrm{P}^{-1} =$$

2°) Calculer $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ à l'aide de la calculatrice.

$$\mathrm{D} =$$

3°) Soit n un entier naturel.

Calculer D^n ; en déduire A^n.

Corrigé du contrôle du 20-3-2014

I.

On pose $A=\begin{pmatrix} \ln a & 3\ln\left(a^2\right)-\ln a \\ \ln\dfrac{1}{a} & \ln\sqrt{a} \end{pmatrix}$ où a est un réel strictement positif.

Donner la matrice B telle que $A=(\ln a)B$.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

II.

On pose $A=\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ où a est un réel fixé.

Démontrer que $A^2=\begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A^2 &= A\times A \\
&= \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 a-\sin^2 a & -\cos a\sin a-\sin a\cos a \\ \sin a\cos a+\cos a\sin a & -\sin^2 a+\cos^2 a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2a & -2\sin a\cos a \\ 2\sin a\cos a & \cos 2a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

III.

On pose $A=\begin{pmatrix} 2+i & -i \\ i & 2-i \end{pmatrix}$.

1°) Calculer A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} 4+4i & -4i \\ 4i & 4-4i \end{pmatrix}$$

2°) Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

A est une matrice carrée d'ordre 2.

$\det A=(2+i)(2-i)-i\times(-i)=4+1+i^2=4+\cancel{1}-\cancel{1}=4$

$\det A\neq 0$ donc A est inversible.

$A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-i & i \\ -i & 2+i \end{pmatrix}$ (écriture matricielle factorisée)

IV.

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

À tout point M(x ; y) du plan, on associe le point $M'(x' ; y')$ tel que $x'=2x-y$ et $y'=x+y$.

Déterminer une matrice A telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=1$ et $v_0=2$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1}=-u_n+2v_n \\ v_{n+1}=-3u_n+4v_n \end{cases}$.

1°) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2°) Compléter l'égalité $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3°) En déduire u_8 et v_8 à l'aide de la calculatrice.

$u_8 = 511$ $v_8 = 767$

VI.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer P^{-1} à l'aide de la calculatrice.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2°) Calculer $D = P^{-1}AP$ à l'aide de la calculatrice.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3°) Soit n un entier naturel.

Calculer D^n ; en déduire A^n.

$$D = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (propriété des puissances d'une matrice diagonale)

On a : $D = P^{-1}AP$ d'où $A = PDP^{-1}$.
D'où $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n & 3^n & 0 \\ (-1)^n & 0 & 1 \\ 0 & 3^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n & 3^n - (-1)^n \\ (-1)^n - 1 & (-1)^n + 1 & 1 - (-1)^n \\ 3^n - 1 & 1 - 3^n & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$