TS1

Contrôle du jeudi 27 mars 2014 (50 minutes)

Prénom : …………………………………… **Nom :** …………………………………… ……. **/20**

I. (6 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{J}=\int_{0}^{1} \dfrac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{K}=\int_{2}^{3} \dfrac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pour J, on pourra écrire $\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)-1}{(x+1)^2}$.

I = ………………………………………	J = ………………………………………	K = ………………………………………

II. (2 points)

Calculer la valeur moyenne µ de la fonction $f : x \mapsto x^2+4$ sur l'intervalle [– 1 ; 1] (détailler le calcul).

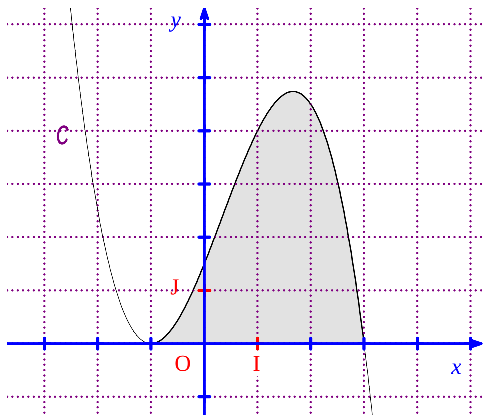
………

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(x+1)^2(3-x)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité de longueur étant le centimètre.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine grisé en cm^2.

Calculer $\mathcal{A}$ (valeur exacte).

$\mathcal{A}$ = ………………………………



IV. (4 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Parmi les démonstrations suivantes laquelle (ou lesquelles) permet(tent) de justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$?

Démonstration 1

$g(x)$ existe si et seulement si $x+\sqrt{x^2+1}>0$
si et seulement si $\sqrt{x^2+1}>-x$
si et seulement si $x^2+1>x^2$
si et seulement si $1>0$

Cette dernière inégalité est vraie donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 2

Soit x un réel quelconque.
On a : $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ soit $\sqrt{x^2+1}>|x|$.
Or $|x|\geqslant -x$ d'où $\sqrt{x^2+1}>-x$ et par suite, $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

Comme $\forall x\in\mathbb{R}\quad x+\sqrt{x^2+1}>0$, on en déduit que g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 3

Soit x un réel quelconque.

Si $x\geqslant 0$, alors $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

Si $x<0$, alors $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

Comme $x<0$, $-x>0$ d'où $\sqrt{x^2+1}-x>0$.

Par suite, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}>0$ d'où $x+\sqrt{x^2+1}>0$.

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad x+\sqrt{x^2+1}>0$ et donc que g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration(s) choisie(s) : ……………………………..

2°) Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

V. (4 points : 2 points + 1 point + 1 point)

On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Démontrer que $\mathrm{I}+\mathrm{J}=1$.
2°) Calculer J ; en déduire la valeur de I.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

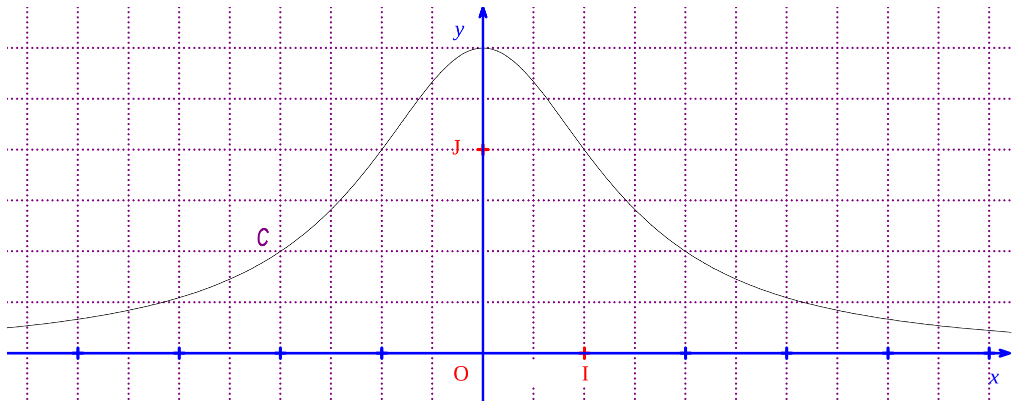
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

VI. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2}$. Il est demandé de ne rien écrire sur le graphique.



1°) Déterminer le meilleur encadrement possible de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du graphique.

2°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale approchée au centième par défaut de I.

1°) …………………………………………………………………… 2°) ……………………………

Corrigé du contrôle du 27-3-2014

I.

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{J}=\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{K}=\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pour J, on pourra écrire $\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)-1}{(x+1)^2}$.

$\mathrm{I}=2(\mathrm{e}-1)$	$\mathrm{J}=\ln 2-\dfrac{1}{2}$	$\mathrm{K}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{8}$

Solution détaillée :

Pour I, on écrit $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\ldots$ (relation de Chasles)

Pour J, on écrit $\mathrm{J}=\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\ldots$

Pour K, on écrit $\mathrm{K}=\left[-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|\right]_2^3=\ldots$

II.

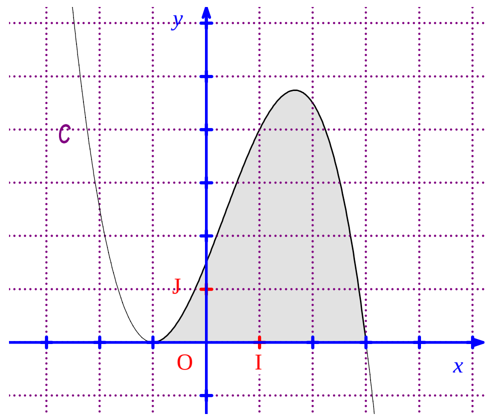
Calculer la valeur moyenne μ de la fonction $f : x \mapsto x^2+4$ sur l'intervalle [– 1 ; 1] (détailler le calcul).

$$\mu=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\left(x^2+4\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1}=\frac{13}{3}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(x+1)^2(3-x)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité de longueur étant le centimètre.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine grisé en cm^2.

Calculer $\mathcal{A}$ (valeur exacte).



$$\mathcal{A}=\frac{32}{3}\text{ u.a.}$$

Solution détaillée :

On calcule l'intégrale de f sur l'intervalle [– 1 ; 3] à la main ou à l'aide de la calculatrice.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Parmi les démonstrations suivantes laquelle (ou lesquelles) permet(tent) de justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$?

Démonstration 1	$g(x)$ existe si et seulement si $x+\sqrt{x^2+1}>0$ si et seulement si $\sqrt{x^2+1}>-x$ si et seulement si $x^2+1>x^2$ si et seulement si $1>0$ Cette dernière inégalité est vraie donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 2	Soit x un réel quelconque. On a : $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ soit $\sqrt{x^2+1}>\lvert x\rvert$. Or $\lvert x\rvert\geqslant -x$ d'où $\sqrt{x^2+1}>-x$ et par suite, $x+\sqrt{x^2+1}>0$. Comme $\forall x\in\mathbb{R}\quad x+\sqrt{x^2+1}>0$, on en déduit que g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 3	Soit x un réel quelconque. Si $x \geqslant 0$, alors $x+\sqrt{x^2+1}>0$. Si $x<0$, alors $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ Comme $x<0$, $-x>0$ d'où $\sqrt{x^2+1}-x>0$. Par suite, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}>0$ d'où $x+\sqrt{x^2+1}>0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+\sqrt{x^2+1}>0$ et donc que g est définie sur $\mathbb{R}$.

Démonstration(s) choisie(s) : 2 et 3

2°) Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=f(x)$$

On a donc $g'=f$. Par conséquent, g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

V.

On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Démontrer que $\mathrm{I}+\mathrm{J}=1$.
2°) Calculer J ; en déduire la valeur de I.

1°)

$$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}+\frac{\cos x}{1+2\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x+1)\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1$$

2°)

$$\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

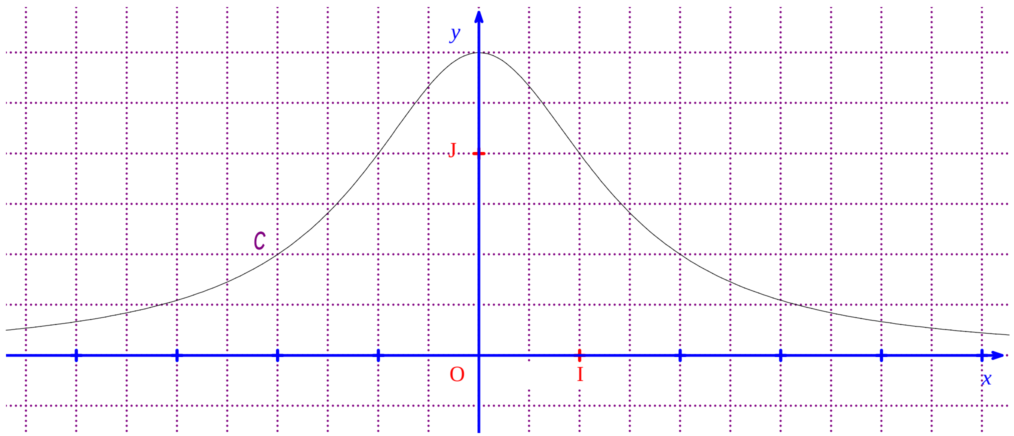
$$=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\ln 3}{2}$$

D'après la question 1°), on en déduit $\mathrm{I}=1-\mathrm{J}=1-\dfrac{\ln 3}{2}$.

VI.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2}$. Il est demandé de ne rien écrire sur le graphique.



1°) Déterminer le meilleur encadrement possible de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du graphique.

2°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale approchée au centième par défaut de I.

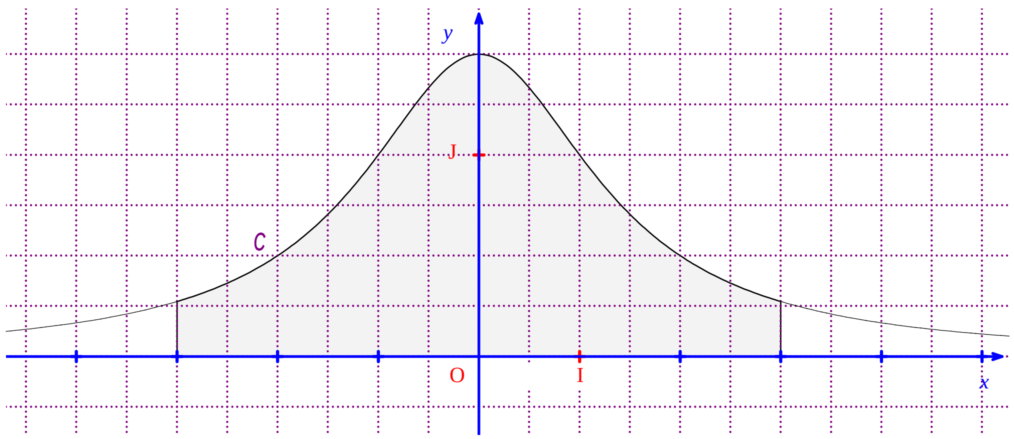
1°) $3{,}75 < \mathrm{I} < 5{,}25$

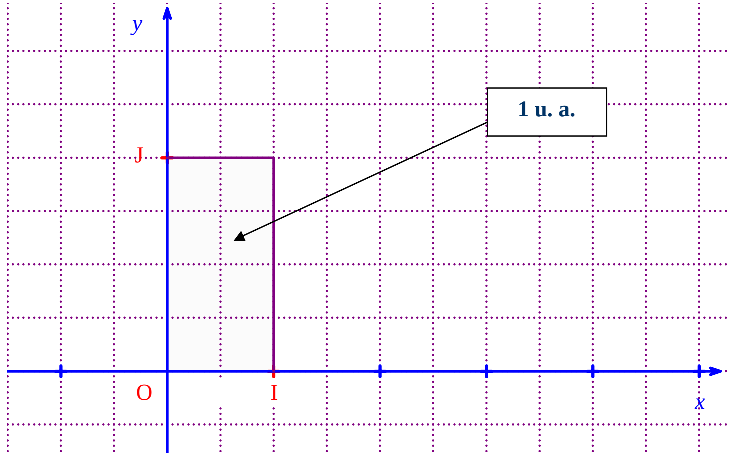
2°) 4,79

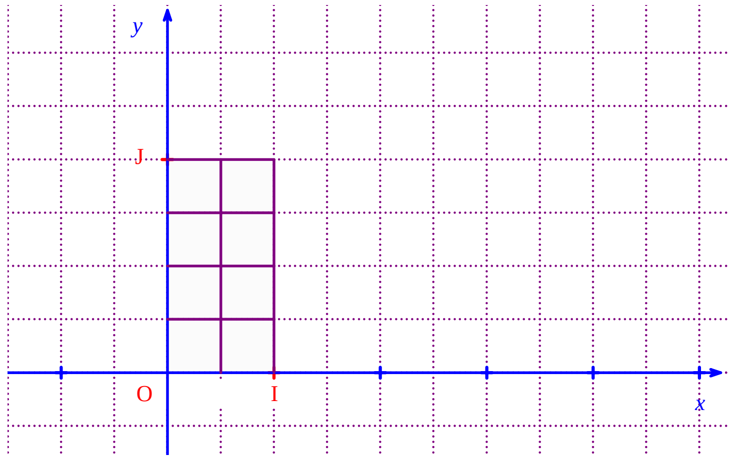
Solution détaillée :

1°) On utilise les carreaux.

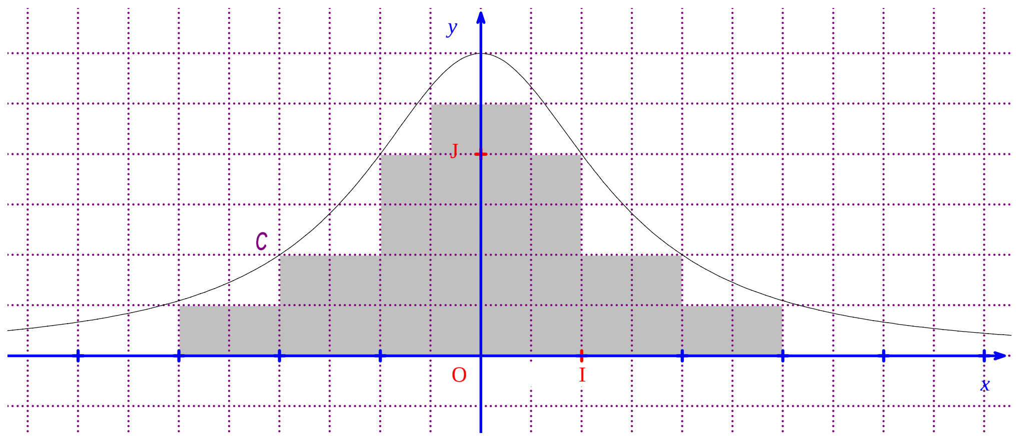
L'intégrale correspond à la valeur de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [– 3 ; 3].





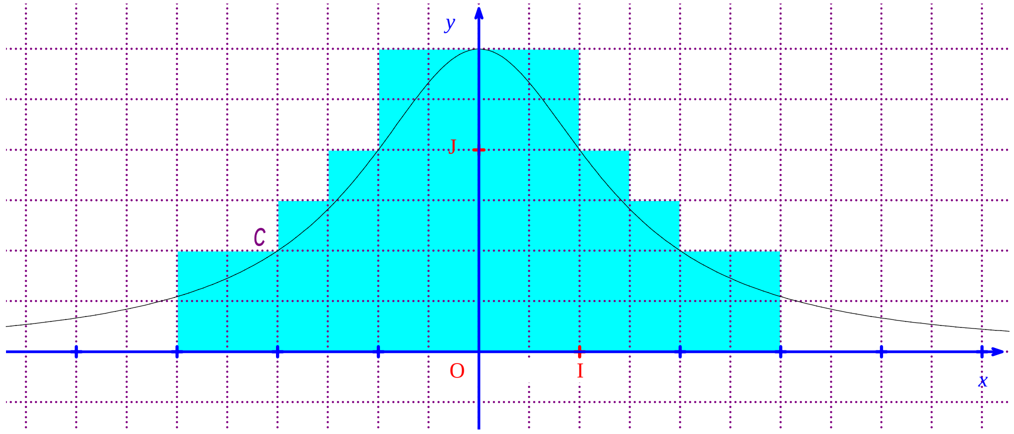


On colorie tous les carreaux intérieurs au domaine.



On compte 30 petits carreaux.

Or chaque carreau représente $\frac{1}{8}$ d'unité d'aire d'où une aire de $\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$ u. a..



On compte 46 petits carreaux.

Or chaque carreau représente $\frac{1}{8}$ d'unité d'aire d'où une aire de $\frac{46}{8}=\frac{23}{4}$ u. a..

2°) L'affichage obtenu sur la calculatrice est : 4,795395945.