TS1

Contrôle du jeudi 13 mars 2014
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : … / 20

I. (2 points)

Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

$1+\mathrm{i}=$ ……………………

II. (2 points)

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'.

Compléter les égalités suivantes à l'aide de θ et θ'.

$\arg\left(z\overline{z'}\right)=$ …………………… (2π) ; $\arg\left(\dfrac{z}{(1+\mathrm{i})z'}\right)=$ …………………… (2π)

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

III. (6 points)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par son premier terme $z_0=2$ et la relation de récurrence $z_{n+1}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n$ pour tout entier naturel n. On note A_n le point d'affixe z_n.

1°) Quelle est la nature de la suite (z_n) ? Répondre avec précision.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Exprimer z_n en fonction de n sous forme exponentielle.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\mathrm{i}$ (1).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) Déduire de (1) que le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_{n+1} (on attend tous les détails de la démonstration).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (7 points)

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui, à tout point M de P d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) a) Déterminer les affixes des points U et V invariants par f (donner les résultats sans détailler les calculs).

$z_U =$ ……………… $z_V =$ ………………

b) Démontrer que U et V appartiennent à $\mathcal{C}$ (le faire bien pour un seul point).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

c) Écrire les affixes de U et V sous forme exponentielle.

$z_U =$ ……………… $z_V =$ ………………

2°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'affixe z. On note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

a) Préciser le module et un argument de z. En déduire que $z = e^{i\theta}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b) Démontrer que $\frac{z'}{z} = 2\cos\theta$. En déduire que O, M et M' sont alignés.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (3 points)

Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^n e^{-x}\right)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 13-3-2014

I.

Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

II.

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'.

Compléter les égalités suivantes à l'aide de θ et θ'.

$\arg\left(z\,\overline{z'}\right)=\theta-\theta'\ \ (2\pi)$; $\arg\left(\dfrac{z}{(1+\mathrm{i})z'}\right)=\theta-\dfrac{\pi}{4}-\theta'\ \ (2\pi)$

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

III.

On considère la suite de nombres complexes $\left(z_n\right)$ définie par son premier terme $z_0=2$ et la relation de récurrence $z_{n+1}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n$ pour tout entier naturel n. On note A_n le point d'affixe z_n.

1°) Quelle est la nature de la suite $\left(z_n\right)$? Répondre avec précision.

La suite $\left(z_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme $z_0=2$ et de raison $q=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

2°) Exprimer z_n en fonction de n sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
z_n&=2\times\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\\
&=2\times\left(\frac{\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^n\\
&=2\times\frac{\left(\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n}{2^n}\\
&=2\times\frac{\left(\sqrt{2}\ \right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{2^n}\\
&=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{2^{n-1}}\\
&=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{n-1}}\\
&=\left(\sqrt{2}\right)^{n-2n+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\\
&=\left(\sqrt{2}\right)^{2-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}
\end{aligned}$$

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\mathrm{i}$ (1).

$$\begin{aligned}
\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}&=\frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n-z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n}\\
&=\frac{\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}-1\right)\cancel{z_n}}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\cancel{z_n}}\\
&=\frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}}\\
&=\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}\\
&=\mathrm{i}
\end{aligned}$$

4°) Déduire de (1) que le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1} (on attend tous les détails de la démonstration).

On a : $\left|\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = |\,i\,| = 1$.

Or $\left|\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = \dfrac{|\,z_{n+1}-z_n\,|}{|\,z_{n+1}\,|} = \dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}}$ donc $A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$.

Donc le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.

On a : $\arg\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \arg i = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Or $\arg\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \left(\overrightarrow{OA_{n+1}}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Donc le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

On en déduit que le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1}.

IV.

Soit *f* l'application du plan *P* dans lui-même qui, à tout point M de *P* d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) a) Déterminer les affixes des points U et V invariants par *f* (donner les résultats sans détailler les calculs).

$z_U = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z_V = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

b) Démontrer que U et V appartiennent à $\mathcal{C}$ (le faire bien pour un seul point).

$$OU = |\,z_U\,| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \dfrac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$$

Donc $U \in \mathcal{C}$.

De même, $OV = 1$ donc $V \in \mathcal{C}$.

c) Écrire les affixes de U et V sous forme exponentielle.

$z_U = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ $z_V = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'affixe *z*. On note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

a) Préciser le module et un argument de *z*. En déduire que $z = e^{i\theta}$.

$|\,z\,| = OM = 1$ puisque $M \in \mathcal{C}$.

$\arg z = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right) \quad (2\pi)$

Donc $\arg z = \theta \quad (2\pi)$.

Par suite, $z = |\,z\,|e^{i\theta} = e^{i\theta}$.

b) Démontrer que $\dfrac{z'}{z} = 2\cos\theta$. En déduire que O, M et M' sont alignés.

$$\frac{z'}{z} = \frac{1+e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} + \frac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\theta$$

Donc $z' = 2\cos\theta\, z$.

Par suite, $\overrightarrow{OM'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{OM}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont donc colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que O, M et M' sont alignés.

V.

Soit *n* un entier naturel non nul.
Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right) = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n e^{-x}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$