1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le mercredi 19 mars 2014

Partie A

On note φ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Ce nombre est appelé le *nombre d'or**.

1°) Donner la valeur exacte de φ (sans rédiger).

2°) En utilisant l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$, calculer φ^3 en fonction de φ sous la forme $a\varphi + b$ où a et b sont des entiers relatifs à déterminer.
Calculer de même φ^4.

Partie B

On note (F_n) la suite définie par la donnée de ses deux premiers termes $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ ainsi que par la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier naturel n.
La suite (F_n) est appelée suite de Fibonacci**.

1°) Calculer F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 (calculs à la main, donner uniquement les résultats sur la copie).

2°) Définir la suite sur calculatrice. Donner les valeurs de F_{10} à F_{20}.

3°) a) Vérifier que $\varphi^2 = F_2\varphi + F_1$ et que $\varphi^3 = F_3\varphi + F_2$.
b) Quelle conjecture peut-on émettre ?
c) On admet que cette conjecture est vraie.
Donner alors l'expression de φ^{15} et de φ^{20} en fonction de φ.

4°) a) Exprimer $\frac{1}{\varphi}$ sous la forme $a\varphi + b$ où a et b sont des entiers relatifs à déterminer.
Faire de même $\frac{1}{\varphi^2}$.

b) Proposer une formule pour $\frac{1}{\varphi^n}$ où n est un entier naturel non nul analogue à celle donnée dans la question 3°).
On ne demande pas de démonstration.

Partie C (Facultatif)

Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $ax^{15} + bx^{14} + 1$ soit divisible par $x^2 - x - 1$.

* Ce nombre célèbre se retrouve dans la nature (pommes de pin, spirales de tournesol…), en architecture (temples et théâtres grecs) et en peinture à partir de la Renaissance.

** Fibonacci, autrement appelé Léonard de Pise, est un grand mathématicien du XII^{e} siècle. Il a notamment apporté en Occident les connaissances mathématiques des Arabes.

Commentaires

Partie A

2°) Il faut absolument utiliser l'égalité ; il ne faut pas utiliser la valeur exacte de φ déterminée à la question 1°).

Partie B

Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2 (chaque terme sauf les deux premiers, est égal à la somme des deux précédents).

On admet que pour tout entier naturel n, F_n est un entier naturel (raisonnement par récurrence assez simple).

2°) Voir fiche sur suites et calculatrices (en 1ère S) pour la programmation des suites définies en récurrence double.

On écrit la relation de récurrence sous la forme $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

On rentre :

$$u(n) = u(n-1) + u(n-2)$$
$$u(n\text{Min}) = \{1, 0\}$$

La calculatrice écrit les deux premiers termes entre accolades ; ne pas se poser de question pourquoi.

Attention à l'ordre des nombres entre accolades : 1 d'abord (c'est-à-dire u_1), 0 ensuite (c'est-à-dire u_0).

On tape 1.
On efface l'accolade du bout, on tape une virgule puis 0.

On tape $\boxed{\text{entrer}}$.

L'accolade se met toute seule.

Question d'Adrien Fructus :

Pour tracer le graphique, il faut régler dans $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{zoom}}$ (format) Time et non Web.

Antoine Defaye :

« C'est seulement des points car on a une relation de récurrence d'ordre 2. »

Partie C

On pourra lire le document sur les formules de Cramer (placé en Terminale spécialité mathématiques).

Corrigé du DM pour le 19-3-2014

Partie A

On note φ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Ce nombre est appelé le *nombre d'or**.

1°) Donner la valeur exacte de φ (sans rédiger).

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2°) En utilisant l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$, calculer φ^3 en fonction de φ sous la forme $a\varphi + b$ où a et b sont des entiers relatifs à déterminer.

On a : $\varphi^2 = \varphi + 1$ (1).

$$\varphi^3 = \varphi \times (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$

Calculer de même φ^4.

$$\varphi^4 = \varphi \times \varphi^3 = \varphi \times (2\varphi + 1) = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2$$

Partie B

On note (F_n) la suite définie par la donnée de ses deux premiers termes $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ ainsi que par la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier naturel *n*.
La suite (F_n) est appelée suite de Fibonacci**.

1°) Calculer F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 (calculs à la main, donner uniquement les résultats sur la copie).

$F_2 = 1$
$F_3 = 2$
$F_4 = 3$
$F_5 = 5$
$F_6 = 8$

2°) Définir la suite sur calculatrice. Donner les valeurs de F_{10} à F_{20}.

$F_7 = 13$
$F_8 = 21$
$F_9 = 34$
$F_{10} = 55$
$F_{11} = 89$
$F_{12} = 144$
$F_{13} = 233$
$F_{14} = 377$
$F_{15} = 610$
$F_{16} = 987$
$F_{17} = 1597$
$F_{18} = 2584$
$F_{19} = 4181$
$F_{20} = 6765$

3°) a) Vérifier que $\varphi^2 = F_2\varphi + F_1$ et que $\varphi^3 = F_3\varphi + F_2$.

On sait que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Or $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ donc $\varphi^2 = F_2\varphi + F_1$.

On sait que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.
Or $F_2 = 1$ et $F_3 = 2$ donc $\varphi^3 = F_3\varphi + F_2$.

b) Quelle conjecture peut-on émettre ?

On peut penser que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$.

c) On admet que cette conjecture est vraie.
Donner alors l'expression de φ^{15} et de φ^{20} en fonction de φ.

$$\begin{aligned}\varphi^{15} &= F_{15}\varphi + F_{14}\\ &= 610\varphi + 377\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{20} &= F_{20}\varphi + F_{19}\\ &= 6765\varphi + 4181\end{aligned}$$

4°) a) Exprimer $\dfrac{1}{\varphi}$ sous la forme $a\varphi + b$ où a et b sont des entiers relatifs à déterminer.

Faire de même $\dfrac{1}{\varphi^2}$.

On a : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Donc $\varphi(\varphi - 1) = 1$ d'où $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

$$\frac{1}{\varphi^2}=(\varphi-1)^2$$
$$=\varphi^2-2\varphi+1$$
$$=\varphi+1-2\varphi+1$$
$$=2-\varphi$$

b) Proposer une formule pour $\frac{1}{\varphi^n}$ où n est un entier naturel non nul analogue à celle donnée dans la question 3°).
On ne demande pas de démonstration.

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{\varphi^n}=(-1)^n\left(F_{n+1}-F_n\times\varphi\right)$.

Partie C (Facultatif)

Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $ax^{15}+bx^{14}+1$ soit divisible par x^2-x-1.

Les racines du polynôme x^2-x-1 sont φ et $-\frac{1}{\varphi}$ (on utilise la formule du produit des racines d'une équation du second degré).

$ax^{15}+bx^{14}+1$ est divisible par x^2-x-1 $\Leftrightarrow$ φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont racines de $ax^{15}+bx^{14}+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\varphi^{15}+b\varphi^{14}+1=0 \\ a\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{15}+b\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{14}+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\varphi^{15}+b\varphi^{14}+1=0 \\ -\frac{a}{\varphi^{15}}+\frac{b}{\varphi^{14}}+1=0 \end{cases}$$

Le dernier système est un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Le déterminant de ce système est égal à $D=\varphi+\frac{1}{\varphi}=2\varphi-1=\sqrt{5}$.

$D\neq 0$ donc le système admet un unique couple solution donné à l'aide des formules de Cramer :

$$\begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\varphi^{14}}+\varphi^{14}\right) \\ b=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\varphi^{15}}-\varphi^{15}\right) \end{cases}.$$

On utilise ensuite les formules $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ et $\dfrac{1}{\varphi^n} = (-1)^n\left(F_{n+1} - F_n \times \varphi\right)$ pour calculer *a* et *b*.

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\left(F_{15} - F_{14}\varphi\right) + F_{14}\varphi + F_{13}\right)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(F_{13} - F_{15} + 2F_4\varphi\right)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-F_{14} + 2F_{14}\varphi\right)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-F_{14} + 2F_{14}\varphi\right)$$
$$a = \frac{F_{14}}{\sqrt{5}}\left(2\varphi - 1\right)$$
$$a = \frac{F_{14}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}$$
$$a = F_{14}$$
$$a = 377$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(F_{16} - F_{15}\varphi - F_{15}\varphi - F_{14}\right)$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(F_{15} - 2F_{15}\varphi\right)$$
$$b = \frac{F_{15}}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{5}\right)$$
$$b = -F_{15}$$
$$b = -610$$

On vérifie aisément grâce à un logiciel de calcul formel que le polynôme $377x^{15} - 610x^{14} + 1$ est bien divisible par le polynôme $x^2 - x + 1$ (et du même coup, on obtient le quotient).