Problème

On rappelle que, par convention, on a : $\binom{n}{k} = 0$ si k et n sont des entiers naturels tels que $k > n$.

Pour tout entier naturel n, on pose alors $\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

1°) Calculer φ_n pour $n \in \{0\,;1\,;...\,;5\}$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\varphi_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k+1}$.

3°) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2}$.

4°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ (on utilisera un raisonnement par récurrence).

5°) Démontrer que pout tout entier naturel n non nul, on a : $\varphi_n{}^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = (-1)^n$.

6°) Démontrer, en utilisant la question 4°), que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\varphi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\sqrt{5}\right)^{k-1}.$$

7°) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $\varphi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n+1}{2i+1} 5^i$.