TS1

Contrôle du vendredi 14 février 2014 (4 heures)

Enseignement obligatoire (note sur 20)

I. (4 points)

Une usine fabrique des jouets. Ils sont formés de deux pièces principales : les pièces de type A et les pièces de type B.

On complètera le tableau de réponses fourni sur la feuille jointe au sujet sans détailler les calculs sur la copie.

Partie 1

Les pièces de type A qui sont stockées ont été fabriquées par deux machines.
La première machine a fourni 60 % des pièces du stock et 1 % des pièces qu'elle fabrique sont défectueuses.
On sait que 2 % des pièces du stock sont défectueuses.
1°) Calculer la probabilité qu'une pièce fabriquée par la deuxième machine soit défectueuse.
2°) Une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse.
Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la deuxième machine ?
3°) On prélève au hasard 20 pièces dans le stock de pièces de type A. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ces tirages à des tirages avec remise.
Calculer la probabilité que trois pièces au moins soient défectueuses (valeur arrondie au millième).

Partie 2

L'usine commande les pièces de type B à un sous-traitant. Les pièces de ce type sont rouges ou sont bleues. Il a été commandé 60 % de pièces rouges.
À la livraison, les pièces sont mélangées. On prélève au hasard 150 pièces dans le stock de pièces qui a été reçu. Le nombre de pièces étant très important, on assimile ces tirages à des tirages avec remise.
1°) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de pièces rouges dans un échantillon de 150 pièces.
2°) On constate qu'il y a 79 pièces rouges dans les pièces prélevées. La livraison est-elle conforme à la commande ? Répondre par oui ou non sans justifier.

II. (4 points)

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1°) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3°) Calculer $f'(x)$.

4°) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (complet, avec limites et extremum).

Partie 2

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par
$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ et $h_n(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq 1$, on a $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2°) Comparer les fonctions h_n et g_n'. En déduire que pour tout réel $x \neq 1$, on a $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

3°) On pose $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la **partie 1**.
En utilisant les résultats de la **partie 2**, déterminer une expression simplifiée de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. On pensera à utiliser $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

III. (4 points)

1°) On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ avec $z \in \mathbb{C}$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ (1).

2°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}$, $z_\mathrm{C} = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_\mathrm{D} = \overline{z_\mathrm{C}}$.
Aucune figure n'est exigée sur la copie.
a) Démontrer brièvement, sans détailler tous les calculs, que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ de centre le point Ω d'affixe 3.
b) On note E le symétrique de D par rapport à O.
Déterminer la nature du triangle BCE (on ne demande pas de détailler tous les calculs ; on se contentera d'une démarche succincte).

IV. (3 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [BF].
On note également M le milieu de [HJ].
L'espace est rapporté au repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.
Donner sans justifier les coordonnées des sommets du parallélépipède puis celles des points I, J, M.
Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1°) Démontrer que M appartient au plan (BGI).
2°) La droite (AM) coupe le plan (EFG) en un point N.
Calculer les coordonnées de N.
3°) Démontrer que N appartient à la droite (EG).

V. (5 points)

On rappelle les formules suivantes :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{5}{\cos x + \sin x}$.
On ne demande pas vérifier que la fonction f est bien définie sur l'intervalle I.

Partie 1

1°) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, on a $f'(x) = 5\dfrac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$.

2°) Vérifier que pour tout réel x on a : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur I.
On ne demande pas de détailler le calcul des extremums sur la copie.

Partie 2

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 4$ (E).

1°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

2°) On se propose de déterminer un encadrement de α en utilisant l'algorithme donné ci-contre :

Entrée :
Saisir p

Initialisations :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0,5

Traitement :
Tantque $b - a \geqslant p$ **Faire**
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  r prend la valeur $\dfrac{5}{\cos m + \sin m}$
  Si $r \leqslant 4$
    Alors b prend la valeur m
    Sinon a prend la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a et b

Décrire le rôle de cet algorithme si l'on choisit $p = 10^{-1}$ en entrée. On répondra avec précision par une phrase.
On ne demande pas de faire tourner l'algorithme « à la main » ni de le programmer sur calculatrice.
3°) Déterminer la valeur exacte de $\sin 2\alpha$.

Enseignement de spécialité (note sur 20)
À traiter sur la feuille jointe au sujet

À chaque lettre de l'alphabet, on associe un nombre entier compris entre 0 et 25 (A → 0, B → 1, …, Z → 25).

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre entier m.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante.

1°) Coder le mot « ALICE ». Ne pas donner le détail des calculs.
2°) Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1\ [26]$. On ne demande pas de détailler la démarche.
3°) Démontrer alors l'équivalence : $9m + 5 \equiv p\ [26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15\ [26]$.
4°) Décoder le mot « FZJPC ». Détailler la démarche succinctement pour une seule lettre.

TS1

Feuille à remettre dans la copie

Nom :……………………………………..

Obligatoire (sur 20)

Prénom :…………………………..…

I	II	III	IV	V

I.

Partie 1		
	1°)	
	2°)	
	3°)	

Partie 2		
	1°)	
	2°)	

Spécialité (sur 20)

1°) …………………………………… 2°) …………………..

3°) ……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

4°) ……

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 14-2-2014

Obligatoire

I.

Partie 1	1°)	0,035
	2°)	0,7
	3°)	0,007

Partie 2	1°)	$\left[\frac{78}{150};\frac{102}{150}\right]$
	2°)	oui

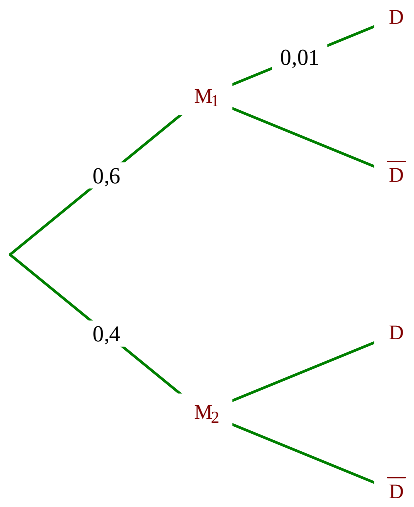
Solution détaillée :

Partie 1

On définit les événements :

M_1 : « La pièce a été fabriquée par la première machine »
M_2 : « La pièce a été fabriquée par la deuxième machine »
D : « La pièce est défectueuse »

On fait un arbre de probabilités.



1°) D'après la formule des probabilités totales, on a : $P(\mathrm{D})=0,006+0,4\times P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_2)$ d'où

$P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_2)=\dfrac{0,02-0,006}{0,4}=0,035$

2°) $P(\mathrm{M}_2/\mathrm{D})=\dfrac{P(\mathrm{M}_2\cap\mathrm{D})}{P(\mathrm{D})}=\dfrac{0,4\times0,035}{0,02}=0,7$

3°) On note X la variable aléatoire …. .

On a : $P(\mathrm{X}\geqslant 3)=1-P(\mathrm{X}\leqslant 2)$.

Sur calculatrice, on tape 1 – binomcdf(20,0.02,2).

On obtient : $P(\mathrm{X}\geqslant 3)=0,007068693...\leqslant\ 2)$.

Partie 2

1°) On utilise la loi binomiale de paramètres 150 et 0,6.

On tape binomcdf(150,0.6,X) sur la calculatrice.

On lit dans la table $a=78$ et $b=102$.

II.

Partie 1

$f : x \mapsto x\mathrm{e}^{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) **Déterminons la limite de f en $-\infty$.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

La deuxième limite est une limite de composée qu'il n'est pas nécessaire de détailler comme telle.

2°)

• **Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \mathrm{e}\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-x}$$
$$= x\mathrm{e}\times\frac{1}{\mathrm{e}^x}$$
$$= \mathrm{e}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

Déduisons-en la limite de f en $+\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \mathrm{e}\times\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3°) **Calculons $f'(x)$.**

Pour dériver la onction, on utilise la forme de base et non l'écriture $f(x) = \mathrm{e}\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ qui conduit à des calculs très longs.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{1-x} + x\times\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right)$$
$$= \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$$

4°) **Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
SGN de e^{1-x}		+		+	
SGN de $1-x$		+	0	$-$	
SGN de $f'(x)$		+	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$f(1) = 1\times\mathrm{e}^{1-1}$$
$$= 1\times\mathrm{e}^0$$
$$= 1$$

Partie 2

$n \in \mathbb{N}^*$

$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

$h_n(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$

1°) **Démontrons que $\forall x \neq 1$ $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.**

Il s'agit d'une formule sommatoire du cours sur les suites géométriques.

2°)

• **Comparons les fonctions h_n et g_n'.**

On a : $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g_n'(x) = 1 + x + 2x + \ldots + nx^{n-1}$ (la drivée d'une somme est la somme des dérivées).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n'(x) = h_n(x)$$

• **Déduisons-en que $\forall\, x \neq 1 \quad h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.**

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\, 1 \,\} \quad g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (-1) \times (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

De plus, $g_n' = h_n$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\, 1 \,\} \quad h_n'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

3°) $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$

• **Déterminons une expression simplifiée de S_n.**

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k \times \mathrm{e}^{1-k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1}$$

$$= h_n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$$= \frac{n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$$

$$= \frac{n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$$

$$= \frac{n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{n}{\mathrm{e}^n}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) - \frac{1}{\mathrm{e}^n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$$

• **Déduisons-en $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.**

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ (limite de référence)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ (limite de référence)

Donc, d'après les règles opératoires sur les limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}\right)^2$

III.

1°) $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 \quad (z \in \mathbb{C})$

a) **Vérifions que $\forall\, z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+21)$.**

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathbb{C} \quad (z^2+3)(z^2-6z+21) &= z^4 - 6z^3 + 21z^2 + 3z^2 - 18z + 63 \\ &= z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 \\ &= P(z) \end{aligned}$$

b) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0 \quad (1)$.**

$(1) \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2-6z+21) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z^2+3=0 & (1) \\ \text{ou} & \\ z^2-6z+21=0 & (2) \end{array} \right.$$

$(1) \Leftrightarrow z^2+3=0$

$\quad \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$

Le discriminant réduit de (2) est $\Delta' = -3$

Donc (2) admet deux racines distinctes conjuguées dans $\mathbb{C}$: $z_1 = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 3-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$S = \left\{ \mathrm{i}\sqrt{3} \,;\, \mathrm{i}\sqrt{3} \,;\, 3+2\mathrm{i}\sqrt{3} \,;\, 3+2\mathrm{i}\sqrt{3} \right\}$

2°) plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

$z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$, $z_{\mathrm{C}} = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}$

a) **Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ de centre le point Ω d'affixe 3.**

$\Omega\mathrm{A} = \lvert z_{\mathrm{A}} - z_{\Omega} \rvert$ $= \lvert \mathrm{i}\sqrt{3} - 3 \rvert$ $= \sqrt{3+9}$ $= \sqrt{12}$	$\Omega\mathrm{B} = \lvert z_{\mathrm{B}} - z_{\Omega} \rvert$ $= \lvert -\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 \rvert$ $= \sqrt{12}$	$\Omega\mathrm{C} = \lvert z_{\mathrm{C}} - z_{\Omega} \rvert$ $= \lvert 3+2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 \rvert$ $= \sqrt{12}$	$\Omega\mathrm{D} = \lvert z_{\mathrm{D}} - z_{\Omega} \rvert$ $= \lvert 3-2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 \rvert$ $= \sqrt{12}$

Les points A, B, C et D appartiennent donc au cercle Γ de centre le point Ω d'affixe 3.

b) E : symétrique de D par rapport à O

Déterminons la nature du triangle BCE.

$z_{\mathrm{E}} = -z_{\mathrm{D}} = -(3-2\mathrm{i}\sqrt{3}) = -3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= \lvert z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}} \rvert \\ &= \lvert -\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \rvert \\ &= \lvert -3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} \rvert \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{BE} &= \lvert z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{E}} \rvert \\ &= \lvert -\mathrm{i}\sqrt{3} + 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \rvert \\ &= \lvert 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} \rvert \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{EC} &= \lvert z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{E}} \rvert \\ &= \lvert -3+2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \rvert \\ &= 6 \end{aligned}$$

V.

$\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x) = \dfrac{5}{\cos x + \sin x}$.

Partie 1

1°) **Démontrons que $\forall\, x \in \mathrm{I}$ $f'(x) = 5\dfrac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$.**

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I} \quad f'(x) &= 5\left(-\frac{(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} \right) \\ &= 5\frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} \end{aligned}$$

2°) **Vérifions que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.**

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x = \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) \\ &= \sin x - \cos x \end{aligned}$$

3°) **Faisons un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f\,'(x)$ et les variations de f sur I.**

Si $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$, alors $-\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} < 0$ d'où $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ soit $\sin x - \cos x < 0$.

Si $\frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 < x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$ d'où $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ soit $\sin x - \cos x > 0$.

Si $x = \frac{\pi}{4}$, alors $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ soit $\sin x - \cos x = 0$.

On peut aussi utiliser directement le cercle trigonométrique pour comparer sin *x* et cos *x*.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
SGN de $\sin x - \cos x$		$-$	0	$+$	
SGN de $(\cos x + \sin x)^2$		$+$		$+$	
SGN de $f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	5	$\searrow$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	5

Partie 2

$f(x) = 4$ (E)

1°) **Démontrons que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.**

La fonction f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

De plus, $f(0) = 5$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}} = 3{,}68...$

Donc $f(0) > 4 > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

2°) **Décrivons le rôle de l'algorithme si l'on choisit $p = 10^{-1}$ en entrée.**

Il s'agit d'un algorithme de dichotomie.

Si l'on choisit $p = 10^{-1}$ en entrée, l'algorithme donne en sortie les bornes d'un encadrement de α d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

3°) **Déterminons la valeur exacte de sin 2α.**

On a $f(\alpha) = 4$ donc $\dfrac{5}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 4$ d'où $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{5}{4}$.

On en déduit que $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \frac{25}{16}$.

Par conséquent, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{25}{16}$.

Donc $1 + \sin 2\alpha = \frac{25}{16}$ d'où $\sin 2\alpha = \frac{9}{16}$.

IV.

ABCDEFGH : parallélépipède
I : milieu de [EH]
J : milieu de [BF]
M : milieu de [HJ]

L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{B}\left|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{C}\left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{D}\left|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right.$

$\mathrm{E}\left|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{F}\left|\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{G}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\mathrm{H}\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right.$

$\mathrm{I}\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\right.$ (coordonnées du milieu d'un segment) $\mathrm{J}\left|\begin{matrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ (idem) $\mathrm{M}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{matrix}\right.$ (idem)

1°) **Démontrons que M ∈ (BGI).**

$\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{4}\end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{BI}\left|\begin{array}{l}-1\\ \dfrac{1}{2}\\ 1\end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{BG}\left|\begin{array}{l}0\\ 1\\ 1\end{array}\right.$

On remarque que : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BI}$ sont coplanaires.
On en déduit que M ∈ (BGI).

2°) **Calculons les coordonnées de N.**

Le plan (EFG) a pour équation $z=1$.

Or N ∈ (EFG) donc $z_N=1$.

De plus, N ∈ (AM) donc $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AM}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

On a donc $N\left|\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{2}\\ \dfrac{\lambda}{2}\\ \dfrac{3\lambda}{4}\end{array}\right.$.

Or $z_N=1$ d'où $\frac{3\lambda}{4}=1$ soit $\lambda=\frac{4}{3}$.

On en déduit que $N\left|\begin{array}{l}\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\\ 1\end{array}\right.$.

3°) **Démontrons que N ∈ (EG).**

$\overrightarrow{EG}\left|\begin{array}{l}1\\ 1\\ 0\end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{EG}\left|\begin{array}{l}\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\\ 0\end{array}\right.$

On a : $\overrightarrow{EN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$.

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EN}$ sont colinéaires.
On en déduit que N ∈ (EG).

Spécialité

Il s'agit d'un exercice sur le chiffrement affine.

1°) FAZXP

2°) $x=3$

3°) **Démontrons l'équivalence : $9m+5\equiv p$ [26] $\Leftrightarrow$ $m\equiv 3p-15$ [26].**

On va raisonner dans les deux sens.

• Supposons que $9m+5\equiv p$ [26].
On a alors $9m\equiv p-5$ [26]. Donc $3\times 9m\equiv 3(p-5)$ [26].
Or $3\times 9\equiv 1$ [26]. D'où $3\times 9m\equiv m$ [26].
On a alors $m\equiv 3(p-5)$ [26] soit $m\equiv 3p-15$ [26].

• Réciproquement, supposons que $m\equiv 3p-15$ [26].
On a alors $m+15\equiv 3p$ [26].
D'où $9(m+15)\equiv 9\times 3p$ [26] soit $9m+135\equiv 9\times 3p$ [26].
Or on a : $135=26\times 5+5$ d'où $135\equiv 5$ [26] donc $9m+135\equiv 9m+5$ [26].
On a aussi $3\times 9\equiv 1$ [26] donc $9\times 3p\equiv p$ [26].
On a donc $9m+5\equiv p$ [26].

Finalement, on a bien : $9m+5\equiv p$ [26] $\Leftrightarrow$ $m\equiv 3p-15$ [26].

4°) **Décodons le mot « FZJPC ».**

Pour décoder la lettre F, on utilise l'équivalence précédente.
À la lettre F, est associée l'entier $p=5$.
D'après l'équivalence établie à la question 3°), on cherche le nombre entier m tel que $m\equiv 3\times 5-15$ [26] et $0\leqslant m\leqslant 25$.

On obtient $m=0$ ce qui correspond à la lettre A.
Le mot en clair est « AIMER ».