1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le mardi 4 mars 2014

L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques relations métriques dans un triangle rectangle – en dehors du théorème de Pythagore – en utilisant le produit scalaire.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

1°) Démontrer, en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$, que l'on a : $BA^2 = BH \times BC$ (1).
Démontrer également que l'on a : $CA^2 = CH \times CB$ (2).

2°) Démontrer que l'on a : $AH^2 = HB \times HC$ (3) en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).

Indications : transformer le membre de droite en utilisant les relations (1) et (2) ; utiliser ensuite (3).

N.B. :

● Toutes les relations de cet exercice méritent d'être retenues par cœur ; il est fortement conseillé de faire une fiche.

● On peut également démontrer ces relations par d'autres méthodes :

- (1) et (2) avec les cosinus ;

- (1), (2), (3) avec les triangles semblables.

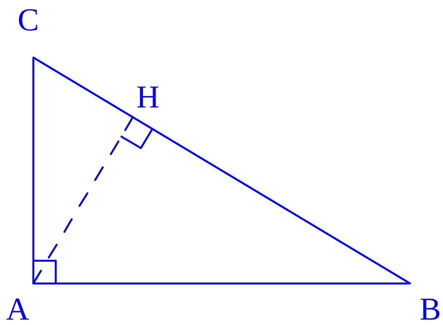
Corrigé du devoir pour le 4 mars 2014

I. Relations métriques dans un triangle rectangle

Hypothèses :

ABC : triangle rectangle en A
H : pied de la hauteur issue de A

Faire une figure.



1°) **Démontrons que $BA^2 = BH \times BC$ (1).**

D'une part, $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \bullet \overrightarrow{BC}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC) *

$= BH \times BC$ car $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BA}$ car A est le projeté orthogonal de C sur la droite (BA)

$= \overrightarrow{BA}^2$

$= BA^2$

Conclusion : $BA^2 = BH \times BC$ (1)

* On peut aussi décomposer $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $CA^2 = CH \times CB$ (2).

D'une part, $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{CB}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$= CH \times CB$ car $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA)

$= \overrightarrow{CA}^2$

$= CA^2$

Conclusion : $CA^2 = CH \times CB$ (2)

2°) **Démontrons que $AH^2 = HB \times HC$ (3).**

D'une part,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \\
&= \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{AH}}_{0} + \overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AH}^2 - HB \times HC \quad (\overrightarrow{HB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont colinéaires de sens contraires}) \\
&= AH^2 - HB \times HC
\end{aligned}$$

D'autre part, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

On a donc : $AH^2 - HB \times HC = 0$.

Par suite, on en déduit que $\boxed{AH^2 = HB \times HC}$ (3).

3°) **Démontrons que $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).**

On va partir du membre de droite de cette relation.

D'après les relations (1) et (2), on a : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{BH \times BC} + \dfrac{1}{CH \times CB}$.

$$= \frac{1}{BC}\left(\frac{1}{BH} + \frac{1}{CH}\right)$$

$$= \frac{1}{BC}\left(\frac{BH + CH}{BH \times CH}\right)$$

Or $H \in [BC]$ d'où $BH + CH = BC$.

De plus, d'après la relation (3), on a : $AH^2 = HB \times HC$.

D'où : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{\cancel{BC}} \times \dfrac{\cancel{BC}}{AH^2}$

Par suite, on a : $\boxed{\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{AH^2}}$.

Autre façon :

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{HB\times HC}$$

$$=\frac{1}{\frac{BA^2}{BC}\times\frac{CA^2}{BC}}$$

$$=\frac{BC^2}{BA^2\times CA^2}$$

$$=\frac{BA^2+CA^2}{BA^2\times CA^2}$$

$$=\frac{\cancel{BA^2}}{\cancel{BA^2}\times CA^2}+\frac{\cancel{CA^2}}{BA^2\times\cancel{CA^2}}$$

$$=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{BA^2}$$