Devoir d'approfondissement

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la famille de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \ldots + x^n .$$

Partie A

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;1[$, on a : $f_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$.

2°) En déduire que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$.

3°) Exprimer $f_n(1)$ en fonction de n.

4°) Démontrer que f_n est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

5°) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

On note α_n cette solution.

Partie B

La suite du problème consiste à étudier la suite (α_n).

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a : $f_{n+1}(x) = x\big(1 + f_n(x)\big)$.

2°) En déduire que pour tout entier n, on a : $f_{n+1}(\alpha_n) = 2\alpha_n$.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) < f_{n+1}(\alpha_n)$ puis que (α_n) est décroissante.

4°) Démontrer que la suite (α_n) converge vers un réel que l'on notera $\boldsymbol{l}$.

5°) Calculer α_2, puis démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $\alpha_n{}^n \leqslant \alpha_2{}^n$.

6°) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n$.

7°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{\alpha_n\left(1 - \alpha_n{}^n\right)}{1 - \alpha_n} = 1$.

8°) En déduire enfin la valeur de $\boldsymbol{l}$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, on a : $f_n(x) = 2^n(1 - n - 2x)\mathrm{e}^{2x}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f^{(n)}$ dans le plan muni d'un repère.

2°) Justifier que $\mathcal{C}_n$ admet une tangente parallèle à l'axe (Ox) en un point M_n de coordonnées $(x_n\,;y_n)$.

3°) Démontrer que (x_n) est arithmétique. Déterminer sa limite.

4°) Démontrer que (y_n) est géométrique. Déterminer sa limite.