Problème d'approfondissement

Partie A

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 e^x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ (résultat sous forme factorisée).

2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer les extremums de f et compléter le tableau.

3°) Déterminer les limites de f en + ∞ et en - ∞.

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

5°) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de a par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

6°) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction $g : x \mapsto e^x + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$.

2°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $g'(x)$ ainsi que les variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

3°) Démontrer que le minimum m de g sur]0 ; + ∞[est donné par $m = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$.

4°) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes.

5°) On note Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet Γ pour courbe asymptote en + ∞.
Quelle est la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ ?

6°) Faire un graphique en prenant un centimètre pour unité graphique.
Tracer $\mathcal{C}$ et Γ.