TS spécialité

Contrôle du jeudi 30 janvier 2014 (50 min)

Prénom : …………………………………… **Nom :** ……………………………………

/20

I. (1 point)

Compléter la définition suivante :

On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il …………………………………………………..

………..….

II. (2 points)

Donner la décomposition en facteurs premiers de 72. $72 =$ ....

En déduire les diviseurs positifs de 72.

Les diviseurs positifs de 72 sont les entiers de la forme ……………………. avec ………………………………

III. (2 points)

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2.
On cherche tous les entiers naturels x tels que l'on ait $2x \equiv 0$ [mod. p] (1) et $x < p^2$ (2).

Lire, comprendre et compléter la démonstration suivante.

Supposons qu'un entier naturel x vérifie les conditions (1) et (2).

La condition (1) est équivalente à $p \mid 2x$.

Par hypothèse, p est un nombre premier strictement supérieur à 2. Donc p et 2 sont deux nombres premiers distincts. Or on sait que deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Donc d'après le théorème de ………….. , $p \mid x$.

On en déduit qu'il existe un entier naturel k tel $x = kp$.

La condition (2) s'écrit alors $kp < p^2$ ce qui est équivalent à $k < p$ car $p > 0$.

k peut donc prendre les valeurs suivantes : …….…………………………………………………………….

donc x peut prendre les valeurs …….………………………………………………………….………

Réciproquement, on vérifie aisément que tous ces entiers naturels vérifient les conditions (1) et (2).

Conclusion :

Les entiers naturels vérifiant les conditions (1) et (2) sont :

………………………………………………………………..…………………………………………….

IV. (9 points)

Soit n un entier naturel.

Compléter la colonne de droite avec V (vrai) ou F (faux) sans justifier.

$n^2 - 2n + 1$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	
b. pour toutes les valeurs de n	
c. pour aucune valeur de n	

$2n^2 + 3n$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	
b. pour toutes les valeurs de n	
c. pour aucune valeur de n	

$n^2 + n + 4$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	
b. pour toutes les valeurs de n	
c. pour aucune valeur de n	

V. (4 points)

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = 7^{n+1} - 7^n$ et $b = 5^{n+1} - 5^n$.

1°) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de a et b. Détailler la démarche pour a uniquement.

2°) En déduire le PGCD et le PPCM de a et b. On donnera ces deux résultats sans justifier.

1°) ………

………

………

………

………

………

………

2°) $\text{PGCD}(a\,;b) =$ .... $\text{PPCM}(a\,;b) =$ ....

VI. (2 points)

Déterminer l'entier naturel n tel que le nombre 121×15^n ait 75 diviseurs positifs.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Bonus (1 point) :

On s'intéresse aux entiers naturels dont l'écriture en base 10 fait intervenir les chiffres 1, 3, 7, chaque chiffre étant écrit une seule fois.
Combien de nombres peut-on former ?
Donner sans justifier la liste de ceux qui sont premiers.

………

………

………

………

………

………

Corrigé

I.

Compléter la définition suivante :

On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il **admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.**

II.

Donner la décomposition en facteurs premiers de 72. $72 = 2^3 \times 3^2$

En déduire les diviseurs positifs de 72.

Les diviseurs positifs de 72 sont les entiers de la forme $72 = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$.

III.

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2.
On cherche tous les entiers naturels x tels que l'on ait $2x \equiv 0$ [mod. p] (1) et $x < p^2$ (2).

Lire, comprendre et compléter la démonstration suivante.

Supposons qu'un entier naturel x vérifie les conditions (1) et (2).

La condition (1) est équivalente à $p \mid 2x$.

Par hypothèse, p est un nombre premier strictement supérieur à 2. Donc p et 2 sont deux nombres premiers distincts. Or on sait que deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Donc d'après le théorème de Gauss, $p \mid x$.

On en déduit qu'il existe un entier naturel k tel $x = kp$.

La condition (2) s'écrit alors $kp < p^2$ ce qui est équivalent à $k < p$ car $p > 0$.

k peut donc prendre les valeurs suivantes : $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Par suite, x peut prendre les valeurs $0, p, 2p, \ldots, (p-1)p$.
Réciproquement, on vérifie aisément que tous ces entiers naturels vérifient les conditions (1) et (2).

Conclusion :

Les entiers naturels vérifiant les conditions (1) et (2) sont : $0, p, 2p, \ldots, (p-1)p$.

L'objectif est de savoir refaire l'exercice sous la forme sèche suivante :

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2.
On cherche tous les entiers naturels x tels que l'on ait $2x \equiv 0$ [mod. p] (1) et $x < p^2$ (2).

L'exercice aurait pu être posé sous la forme de blocs dans le désordre à remettre dans l'ordre.

IV.

Soit n un entier naturel.

Compléter la colonne de droite avec V (vrai) ou F (faux).

$n^2 - 2n + 1$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	F
b. pour toutes les valeurs de n	F
c. pour aucune valeur de n	V

$2n^2 + 3n$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	V
b. pour toutes les valeurs de n	F
c. pour aucune valeur de n	F

$n^2 + n + 4$ est premier

a. pour certaines valeurs de n	F
b. pour toutes les valeurs de n	F
c. pour aucune valeur de n	V

Malgré le pluriel du mot « certaines », à partir d'1 ça fonctionne.

On pouvait programmer les suites sur calculatrice pour avoir une idée.
Les démonstrations, relativement simples, n'étaient pas demandées.

Méthode :

① Pour n^2-2n+1, on écrit $n^2-2n+1=(n-1)^2$.
Un carré parfait n'est jamais premier.

② Pour $2n^2+3n$, on écrit $2n^2+3n=n(2n+3)$.
Cette factorisation nous donne deux diviseurs de $2n^2+3n$: n et $2n+3$.
$2n^2+3n$ admet donc a priori au moins 3 diviseurs 1, n, $2n+3$.
On peut dire que $n<2n+3$.
Les diviseurs 1, n, $2n+3$ sont donc écrits dans l'ordre croissant.
On va regarder si les diviseurs 1 et n sont distincts.

1^er^ cas : $n=1$

Dans ce cas, $2n^2+3n=5$ qui est un nombre premier.

2^e^ cas : $n\geqslant 2$

Dans ce cas, $2n^2+3n=5$ admet au moins 3 diviseurs 1, n, $2n+3$ qui sont deux à deux distincts.
Donc le nombre $2n^2+3n$ n'est pas premier.

③ $n^2+n+4=n(n+1)+4$

Le nombre $n(n+1)$ est pair (car c'est le produit de entiers naturels consécutifs).

Donc $n(n+1)+4$ est pair.

De plus, $n^2+n+4\geqslant 4$.
Le seul nombre premier pair est 2.
Par suite, n^2+n+4 n'est jamais un nombre premier.

V.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a=7^{n+1}-7^n$ et $b=5^{n+1}-5^n$.

1°) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de a et b. Détailler la démarche pour a uniquement.

2°) En déduire le PGCD et le PPCM de a et b. On donnera ces deux résultats sans justifier.

1°)

$$\begin{aligned} a&=7^{n+1}-7^n\\ &=7^n\times 7-7^n\\ &=7^n\times(7-1)\\ &=7^n\times 6\\ &=7^n\times 2\times 3\end{aligned}$$

$b=5^n\times 2^2$

2°) $\text{PGCD}(a\,;b)=2$ $\qquad$ $\text{PPCM}(a\,;b)=12\times 35^n$

VI.

Déterminer l'entier naturel n tel que le nombre 121×15^n ait 75 diviseurs positifs.

On pose : $N=121\times 15^n$.

La décomposition en facteurs premiers de N s'écrit $N=11^2\times 3^n\times 5^n$.

Le nombre de diviseurs de N est égal à $(2+1)\times(n+1)\times(n+1)=3(n+1)^2$.

On cherche $n\in\mathbb{N}$ tel que : $3(n+1)^2=75$ (1).

(1) $\Leftrightarrow (n+1)^2=25$
$\Leftrightarrow n+1=5$ (en effet, $n+1>0$ car $n\in\mathbb{N}$)
$\Leftrightarrow n=4$

L'entier n cherché est 4.

Bonus :

On s'intéresse aux entiers naturels dont l'écriture en base 10 fait intervenir les chiffres 1, 3, 7, chaque chiffre étant écrit une seule fois.
Combien de nombres peut-on former ?
Donner sans justifier la liste de ceux qui sont premiers.

Solution :

1°) On peut former 6 nombres (371, 731, 713, 137, 317, 173).

2°) Ils ne sont pas tous premiers.

Les nombres 371, 731 et 713 ne sont pas premiers.

Les nombres 137, 317 et 173 sont premiers ($713 = 23 \times 31$, $731 = 17 \times 43$, $371 = 7 \times 53$).

On n'attendait pas d'algorithme mais la méthode du cours.

Dans le cas où un même chiffre peut apparaître plusieurs fois :

111 ; 333 ; 777 ;
<u>131</u> ; <u>313</u> ; 717 ;
171 ; <u>373</u> ; 737 ;
133 ; <u>311</u> ; 711 ;
177 ; 377 ; <u>733</u> ;
<u>137</u> ; 371 ; 737 ;
<u>173</u> ; <u>317</u> ; 731.

On peut former 21 nombres.