

Problème

Dans ce problème on étudie la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

2°) Dans cette question, on va s'intéresser au signe de f .

a) Déterminer les réels $x \geq 0$ tels que $f(x) = 0$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$.

b) Étudier le signe de f .

3°) a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les réels $x > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \frac{1}{x}$ et ceux tels que l'on ait $f(x) = -\frac{1}{x}$.

On rangera ces nombres en deux suites strictement croissantes $(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots)$ et $(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$.

c) En déduire la position relative de \mathcal{C} par rapport aux courbes H_+ et H_- d'équations respectives $y = \frac{1}{x}$ et

$$y = -\frac{1}{x}.$$

Comparer les tangentes à \mathcal{C} et H_+ au point d'abscisse b_k ainsi que les tangentes à \mathcal{C} et H_- au point d'abscisse c_k .

4°) Le but de cette question est d'étudier les variations de f .

a) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto \tan x - x$ sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 1$, il existe un élément un élément x_k et un seul de l'intervalle

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\text{ et que } \tan x_k = x_k. \text{ Démontrer que } x_k > k\pi.$$

c) En déduire le signe de f' sur $]0; x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k; x_{k+1}[$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

5°) Dans cette question, on va étudier la fonction f en 0.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ puis on calculera $\varphi'(x)$,

$\varphi''(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$ et on en déduira le signe de φ .

b) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

6°) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3\pi]$.

b) Tracer sur un même graphique les courbes H_+ , H_- et \mathcal{C} en se limitant à l'intervalle $[0 ; 3\pi]$ et placer les points a_k , b_k , c_k et x_k .

On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4,49$ et $x_2 \approx 7,73$.

On prendra pour unité graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.