Thème : la répartition des nombres premiers

Le but est de ce thème est de conjecturer un des grands théorèmes de l'histoire des mathématiques appelé le « théorème des nombres premiers ».

Partie A

1°) Observation des nombres premiers plus petits que x ($x \in \mathbb{N}^*$).

x désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

$\pi(x) = \text{card}\{p \in \boldsymbol{P} \ / \ p \leq x\}$ où $\boldsymbol{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers

On dit que p est une fonction arithmétique (c'est-à-dire qu'elle est définie sur l'ensemble des entiers naturels).

Il n'existe pas de formule explicite pour $\pi(x)$ en fonction de x (c'est démontré).
Ceci explique l'étude qui va suivre.

1°) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi(x)$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5

Il serait intéressant de poursuivre le tableau jusqu'à 100.

On pourrait s'aider d'un programme pour compléter ce tableau.

1 n'est pas un nombre premier.

On conjecture que :

- la fonction π est croissante (avec des paliers, donc pas strictement croissante) ;

- $\pi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Ces deux conjectures se démontrent aisément en utilisant le fait que l'ensemble $\boldsymbol{P}$ est infini.

2°) On s’intéresse à la densité des nombres premiers inférieurs de l’ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Cette densité vaut $\frac{\pi(x)}{x}$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$

On admet que $\frac{\pi(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ce qui s’interprète en disant que les nombres premiers deviennent de plus en plus « rares ».

Partie B

On s’intéresse à l’ordre de grandeur de $\frac{x}{\pi(x)}$ (inverse de la densité) pour de grandes valeurs de x.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^{20}
$\pi(x)$	2,5	4	168	1 229		78 498		50 847 534	2 220 819 602 560 918 840
$\frac{x}{\pi(x)}$	2,5	4	5,952	8,136		13,74			45
$\ln x$	2,3	4,6	6,9	9,2		13,8		18,4	

Les nombres de la première ligne forment une suite géométrique de raison 10.

Les nombres de la 3^{e} ligne forment à peu près une suite arithmétique de raison 2.

On constate que $\frac{x}{\pi(x)} \approx \ln x$ pour de grandes valeurs de x.

Ce résultat est effectivement vrai. Il correspond à la limite suivante :

$$\frac{x}{\ln x \times \pi(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\ln x \times \pi(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

Il a été démontré en 1896 par **Hadamard** et **De la Vallée-Poussin**.

On peut aussi écrire $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ pour de grandes valeurs de x.

L'année prochaine, on écrira $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$ au sens des fonctions « équivalentes » (on dit que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de *a* et l'on note $f \underset{a}{\sim} g$ pour exprimer que $\dfrac{f}{g} \xrightarrow[a]{} 1$).

Anecdote :

Gauss (1777-1855) avait écrit ce résultat à 14 ans dans son cahier.

Commentaires :

Ce théorème n'a pas d'application pratique (ou peu d'applications pratiques), mais une très grande application théorique car elle permet de voir la répartition des nombres premiers.

La démonstration de ce théorème est très difficile ; elle nécessite des connaissances poussées dans plusieurs domaines des mathématiques.

Applications :

1. On peut appliquer la formule pour déterminer des estimations de $\pi(x)$ pour des valeurs numériques particulières de *x*.

$\dfrac{100}{\ln 100} \approx 21,7$ d'où $\pi(100) \approx 21$ (précision inconnue à 1 ou 2 près).

$\dfrac{10^8}{\ln 10^8} \approx 54\times10^5$ d'où $\pi(10^8) \approx 54\times10^5$.

Le théorème ne donne pas la précision de l'approximation, ce qui est peut être frustrant.
Il y a certainement des mathématiciens qui s'y sont intéressés.
Normalement, le théorème n'est pas fait pour être appliqué avec des valeurs numériques.

2. On peut retrouver les résultats de la partie A.

$$\frac{\pi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Donc $\dfrac{\pi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ce dernier résultat montre la raréfaction des nombres premiers.

Il devient de plus en plus difficile de trouver des nombres premiers.