$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 30 janvier 2014

Le but de cet exercice est d'étudier un procédé classique de simplification appelé simplification par « télescopage » ou « en cascade » afin d'établir des formules sommatoires.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ (ou $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k$).

1°) On considère le polynôme $P(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$.

Vérifier que, pour tout réel x, on a : $P(x+1) - P(x) = x$.

2°) On écrit l'égalité $P(x+1) - P(x) = x$ pour $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (l'entier naturel $n \geqslant 1$ étant fixé) et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous (les signes « = » bien en dessous les uns des autres).

$$\boxed{\begin{aligned} P(2) - P(1) &= 1 \\ P(3) - P(2) &= 2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(n) - P(n-1) &= n-1 \\ P(n+1) - P(n) &= n \end{aligned}}$$

Recopier ce cadre, tirer un trait en dessous et barrer en diagonale les termes qui s'annulent dans les membres de gauche.
En déduire une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $S'_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ (ou $S'_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$).

Reprendre la démarche de la **Partie A**, en considérant le polynôme $Q(x) = \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ afin de donner une expression simplifiée de S'_n en fonction de n.

Partie C (facultative)

En utilisant une démarche analogue à celle des parties précédentes, établir une expression simplifiée de

$S''_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ (ou $S''_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$).

Consignes

Les sommes considérées dans tout le devoir ont déjà été rencontrées dans le devoir précédent.

• Remarques générales :

Écrire le cadre en haut de la 2^{e} page de la copie (pour avoir la place de montrer les calculs qui vont suivre).

Penser à quantifier les égalités.

• Remarque sur la question 2°) :

2°)

Écrire le cadre en haut de la 3^{e} page de la copie.

Bien suivre l'énoncé (sans se laisser perturber par le fait que l'on veut calculer la somme des carrés).

Écrire au moins les deux premières lignes (pour $k = 1$ et $k = 2$). Mettre des petits points.

Écrire la dernière égalité pour $k = n$.

$$\boxed{\begin{array}{l} (1+1)^3 = \dots \\ (2+1)^3 = \dots \\ \\ \dots \\ \\ (n+1)^3 = \dots \end{array}}$$

On peut éventuellement utiliser des **outils de calcul formel**. Par exemple, sur XCas, il existe une commande permettant de donner une formule explicite pour une telle somme.