TS1

Contrôle du jeudi 23 janvier 2014
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : …… /20

I. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{1-x}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$ en justifiant. On rédigera une phrase de conclusion claire.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1) et $2\sin 3x = 1$ (2).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Déterminer l'ensemble S des réels x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ tels que $2\sin x \geqslant 1$.

$S =$ ………………………….

IV. On considère la fonction $f : x \mapsto x + \cos^2 x$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) a) Démontrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = 1 - \sin 2x$.

b) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ (rédiger des phrases, on ne fera pas de tableau de variations).

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ (1).

V. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Déterminer la limite en 0 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2\sin x}{3x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{x}$.

VI. On note α le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

1°) Déterminer la valeur exacte de α puis donner à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie de α au millième.

$\alpha =$ .... $\alpha \approx$ .... (valeur arrondie au millième)

2°) Calculer la valeur exacte de $\cos\alpha$ (sous forme d'une valeur numérique). $\cos\alpha =$ ....

Bonus : Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2\sin x - 1}$.

Corrigé du contrôle du 23-1-2014

I. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{1-x}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$ en justifiant. On rédigera une phrase de conclusion claire.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+}(3x)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient on a : } \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(3x)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient on a : } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Donc $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $x=1$ pour asymptote verticale.

f est une fonction rationnelle non nulle (c'est même une fonction homographique).

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x}{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3) = -3$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

Donc $\mathscr{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y=-3$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

Explication :

On a : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = 3x$ et $Q(x) = 1-x$.

Le monôme de plus haut degré de $P(x)$ est $3x$.
Le monôme de plus haut degré de $Q(x)$ est $-x$.

II.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1 = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = 1$ (2).

(2) $\Leftrightarrow \sin 3x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k'\pi}{3} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2 = \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

III. Déterminer l'ensemble S des réels x de l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ tels que $2\sin x \geqslant 1$.

$$S = \left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right]$$

IV. On considère la fonction $f : x \mapsto x + \cos^2 x$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant x+1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Attention, c'est bien l'extension du théorème des gendarmes (ou théorème d'un seul gendarme) qui sert ici puisque l'on a des limites infinies.
Le théorème des gendarmes (avec deux gendarmes) s'applique uniquement lorsque l'on a des limites finies.
Il était donc absurde de calculer les deux limites $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ puis d'en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2°) a) Démontrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 + 2\times(-\sin x)\times\cos x$$

$$= 1 - 2\sin x \cos x$$

$$= 1 - \sin 2x$$

b) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ (rédiger des phrases, on ne fera pas de tableau de variations).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-1 \leqslant)\sin 2x \leqslant 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \sin 2x \geqslant 0$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geqslant 0$; par suite, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

V. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Déterminer la limite en 0 des fonctions $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2\sin x}{3x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sin 2x}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{x^2 + 2\sin x}{3x} = \frac{x^2}{3x} + \frac{2}{3}\times\frac{\sin x}{x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin x}{3x} = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{3}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = \frac{2\sin x \cos x}{x} = 2\cos x \times \frac{\sin x}{x}$$

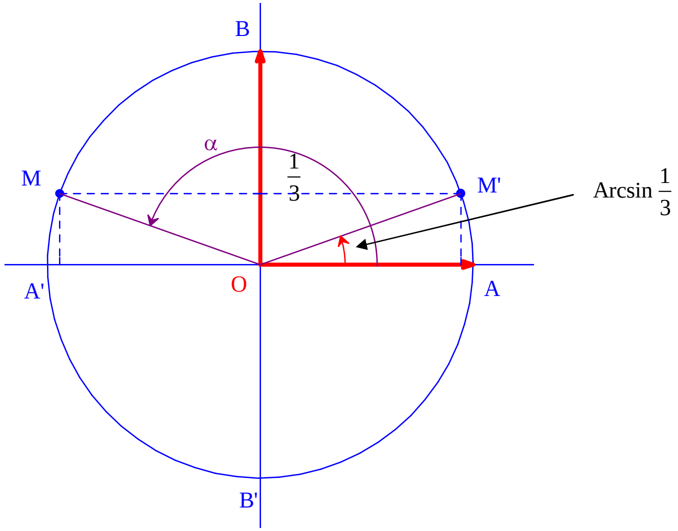
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} (2\cos x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$.

VI. On note α le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

1°) Déterminer la valeur exacte de α puis donner à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie de α au millième.

$\alpha = \pi - \text{Arcsin}\,\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\alpha \approx 2{,}802$ (valeur arrondie au millième)

Explication :



Par définition, $\text{Arcsin}\,\frac{1}{3}$ est le nombre de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ (attention à l'intervalle).

Le point image de $\text{Arcsin}\,\frac{1}{3}$ sur le cercle trigonométrique est le point M'.

Or on cherche le nombre α l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ dont le sinus vaut $\frac{1}{3}$.

Aussi doit-on raisonner par symétrie.
Le point image M associé à a sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M' par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\alpha=\pi-\text{Arcsin}\,\frac{1}{3}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha=2{,}80175574...$

2°) Calculer la valeur exacte de cos α (sous forme d'une valeur numérique).

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Explication :

On a $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ et $\cos\alpha\leqslant 0$ car $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

On n'utilise évidemment pas la valeur approchée de α déterminée au 1°).
On n'utilise pas la calculatrice.

Bonus : Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2\sin x - 1}$.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2\sin x-1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sin x\geqslant \frac{1}{2}$

On utilise le cercle trigonométrique.

$$\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$$