1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 21 janvier 2014 (3 heures 30)

Le barème est donné sur 40.

Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.
En particulier, on n'écrira rien sur les figures ; on reproduira éventuellement au brouillon les figures utiles.

Les traits de fractions, les tableaux de variations et les flèches de variations doivent être faits à la règle.

On accordera une grande importance à la quantification avant les calculs de dérivées.

I. (6 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + c$ (où a, b, c sont trois réels) et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Déterminer a, b et c sachant que :

- $\mathcal{C}$ passe par le point A(0 ; 1) ;
- $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point B(– 2 ; 5).

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Calculer $g'(x)$ en donnant le résultat sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

Recopier et compléter sans justifier la phrase : « g' s'annule en … ».

Faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude détaillée du signe de $g'(x)$ et les variations de la fonction g.

On n'oubliera pas de mentionner tous les « 0 » utiles ainsi que les valeurs des extremums locaux (calculées au brouillon).

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de la solution α de l'équation $g(x) = 0$.

II. (10 points)

Partie A

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 96x}{x - 4}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Recopier et compléter la phrase : « f' s'annule en ……………………………….. ».

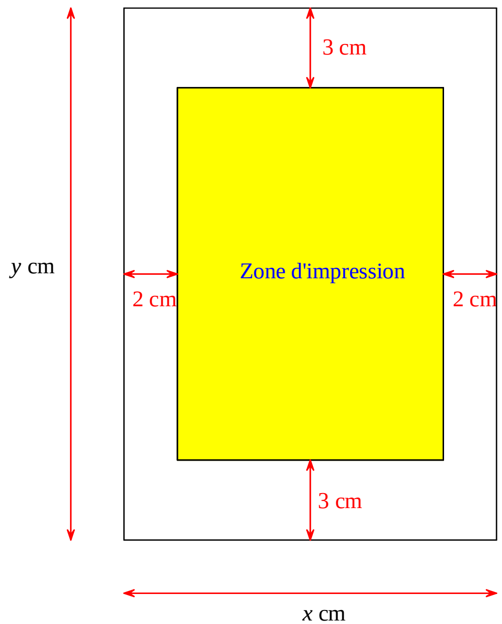
Faire le tableau de variations de f (mêmes consignes qu'à la question 2°) a) de l'exercice **I**).

Partie B

Pour la fabrication d'un livre, un imprimeur doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à droite et à gauche, 3 cm en haut et en bas.

On note x la largeur et y la longueur d'une page, ces deux dimensions étant exprimées en centimètres.

On suppose que $x > 4$ et que $y > 6$.



1°) Exprimer sans justifier en fonction de x et y l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie disponible pour l'impression.

2°) On désire que l'aire de la partie disponible pour l'impression soit égale à $600\ \text{cm}^2$.
Exprimer y en fonction de x pour qu'il en soit ainsi.

3°) En déduire qu'alors l'aire $S(x)$ de la page est égale à $6f(x)$.

4°) En s'aidant de l'étude des variations de f faite dans la **partie A**, déterminer les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.

III. (5 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Le but de l'exercice est de déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par le point K(– 2 ; – 4).

1°) Soit A un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a \in \mathbb{R}$.

Démontrer que la tangente T_a en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = 3a^2x - 2a^3$.

2°) a) Développer et réduire l'expression $E = (t+1)\left(t^2 + 2t - 2\right)$.

b) En déduire les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par le point K.

IV. (5 points)

On écrit les lettres du mot MATHS sur cinq cartons indiscernables au toucher. On met ces cartons dans une boîte et on prélève au hasard trois cartons en remettant à chaque fois le carton dans la boîte. On appelle « mot » une succession de trois lettres, sans tenir compte du sens.
On donnera toutes les probabilités sous forme de fractions irréductibles sans justifier.

1°) Calculer :
a) la probabilité p_1 d'obtenir le mot « AAA » ;
b) la probabilité p_2 que le mot commence par A ;
c) la probabilité p_3 que le mot ne contienne pas la lettre A.
2°) Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de A par mot.
Déterminer la loi de probabilité de X en tableau (calculs au brouillon).

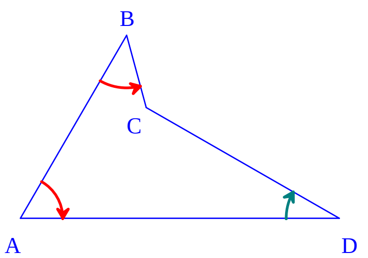
V. (7 points)

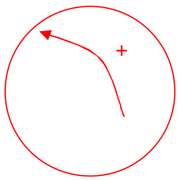
L'organisateur d'une loterie annonce qu'il y aura 1 billet gagnant 5000 €, 5 billets gagnant 1000 € et 50 billets gagnant 50 €, sur un total de N billets (N étant un entier naturel strictement supérieur à 56).
On suppose que tous les billets sont vendus et qu'il n'y a pas de billets perdants.
On note a le prix d'achat d'un billet en euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique d'un joueur en euros qui achète un billet au hasard (différence entre le montant du lot gagné et le prix d'achat du billet).

1°) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a et de N.
2°) Démontrer que l'espérance de X est donnée par $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{12500 - aN}{N}$.
3°) Si la loterie est composée de 2000 billets, quel doit être le prix d'achat d'un billet pour que cette loterie soit équitable ?
4°) a) L'organisateur souhaite faire un bénéfice de 2000 €. On suppose qu'il vend tous les billets.
Sachant que $a = 5$, déterminer N.
b) En déduire alors la valeur arrondie au centième de E(X), puis interpréter ce résultat.

VI. (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un quadrilatère ABCD tel que :
$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.



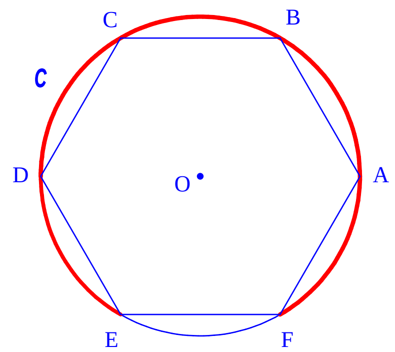


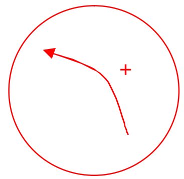
1°) Déterminer par le calcul la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)$.
On détaillera toutes les étapes de calcul.
2°) Démontrer que (AB) $\perp$ (CD).

VII. (3 points)

Dans le plan orienté, on considère un hexagone régulier direct ABCDEF inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. On note x la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

Quel est l'ensemble (intervalle ou réunion d'intervalles) décrit par x lorsque M décrit l'arc $\overset{\frown}{EF}$ de $\mathcal{C}$ (en gras sur la figure) ? Répondre sans justifier.





1ère S1
Nom : ……….……………

Prénom : …..……….…….

Contrôle du mardi 21 janvier 2014 (Copie à rendre)

I *6*	II *10*	III *5*	IV *5*	V *7*	VI *4*	VII *3*	Total / 40	Total / 20

Commentaires :

………

………

………

I.

1°)
………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°)

a) ………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

b) La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α est ……………………… .

II.

Partie A

1°)

$\forall x \in$ ……… $f'(x) =$ ………………………………

$=$ ………………………………

$=$ ………………………………

2°) ………

………

………

………

………

………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

Partie B

1°) $\boldsymbol{A}$ = ………………………………

2°) …………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

3°)
…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

4°)…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

III.

1°) …………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

2°)

a) …………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

b) …………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

IV. Compléter sans rature.

1°) a) $p_1 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ b) $p_2 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ c) $p_3 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ (un seul résultat à chaque fois)

2°)

$\boldsymbol{x_i}$	
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	

V.

1°)

x_i	
$P(X = x_i)$	

2°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) a) …………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b) ………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI.

1°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VII. Lorsque M décrit l'arc $\overset{\smile}{EF}$ de $\mathcal{C}$, x décrit ……………………………….. .

Corrigé du contrôle du 21-1-2014

I.

1°) $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + c$

Déterminons *a*, *b* et *c* sachant que :

- $\mathcal{C}$ passe par le point A(0 ; 1) ;
- $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point B(– 2 ; 5).

A $\in \mathcal{C}$ donc $f(0)=1$.

Donc $a\times 0^3 + b\times 0^2 + c = 1$ d'où $c=1$.

B$\in \mathcal{C}$ donc $f(-2)=5$.

Donc $a\times(-2)^3 + b\times(-2)^2 + c = 5$ d'où $-8a+4b+1=5$ soit $-2a+b=1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point B(– 2 ; 5) donc $f'(-2)=0$ (car le coefficient directeur de la tangente en ce point est nul).

On a donc $12a - 4b = 0$ soit $3a - b = 0$.

Ainsi on est amené à résoudre le système $\begin{cases} -2a+b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$ (système linéaire de deux équations à deux inconnues).

Après résolution, on obtient $a=1$ et $b=3$.

Finalement, $a=1$, $b=3$, $c=1$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

2°) $g : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 1$

On reconnaît que g est en fait la fonction f dont on vient de déterminer l'expression à la question précédente.

a)

• Calculons $g'(x)$.

g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

• Dressons le tableau de variations de *g*.

g' s'annule en – 2 et 0.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On vérifie les variations et les valeurs des extremums sur la calculatrice.
Il n'y avait aucun moyen de se tromper.

b) **Déterminons la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de la solution α de l'équation $g(x)=0$.**

À l'aide de la calculatrice (solveur de l'équation), on trouve : $\alpha = -3{,}1038034027...$.

On a donc : $-3{,}104 \leqslant \alpha < -3{,}103$.

Par conséquent, la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de la solution α de l'équation $g(x)=0$ est – 3,104.

On peut aussi utiliser la méthode de « balayage ».

II.

Il s'agit d'un problème d'optimisation de deux variables que l'on ramène à un problème d'optimisation à une variable.

Partie A

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+96x}{x-4}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\} \quad f'(x) = \frac{(2x+96)(x-4)-1\times(x^2+96x)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}$$

2°) **Dressons le tableau de variations de *f*.**

On considère le polynôme $x^2-8x-384$ (polynôme du second degré).

Son discriminant réduit est $\Delta' = 400$.

Le polynôme admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = 4-20 = -16$ $\qquad$ $x_2 = 4+20 = 24$

On pouvait retrouver très facilement ces valeurs grâce à un programme sur calculatrice.

$f'(x)$ s'annule en – 16 et 24 (et pas en 4 comme beaucoup d'élèves l'ont écrit : 4 est valeur interdite).

x	$-\infty$		-16		4		24		$+\infty$
$x^2-8x-384$		+	0	–		–	0	+	
$(x-4)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	–	||	–	0	+	
Variations de f		↗	64	↘	||	↘	144	↗	

On complète le tableau de variations avec les extremums.

Partie B

1°) **Exprimons en fonction de x et y l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie disponible pour l'impression.**

$\mathcal{A} = (x-4)(y-6)$

2°) **Déterminons y en fonction de x pour que l'aire de la partie disponible pour l'impression soit égale à 600 cm^2.**

$(x-4)(y-6) = 600 \quad (x \neq 4)$

Donc $y-6 = \dfrac{600}{x-4}$

D'où $y = 6 + \dfrac{600}{x-4}$

On obtient finalement : $y = \dfrac{576+6x}{x-4}$.

3°) **Déduisons-en qu'alors l'aire $S(x)$ de la page est égale à $6f(x)$.**

Si $y = \dfrac{576+6x}{(x-4)}$ alors $S(x) = xy = x \times \dfrac{576+6x}{x-4} = \dfrac{6x^2+576x}{x-4} = 6 \times \dfrac{x^2+96x}{x-4} = 6f(x)$

4°) **Déterminons les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.**

D'après la **partie A**, f admet un minimum sur $]4\,;+\infty[$; il vaut 144 et est atteint pour $x = 24$. On en déduit que la consommation de papier est minimale pour $x = 24$; on a alors $y = 36$.
La page a pour largeur 24 cm et pour longueur 36 cm.

III.

$f : x \mapsto x^3$

$\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

K(– 2 ; – 4)

1°) A : point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a \in \mathbb{R}$

Démontrons que la tangente T_a en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = 3a^2x - 2a^3$.

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$.

T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = 3a^2(x-a) + a^3$ ou encore $y = 3a^2x - 3a^3 + a^3$.
Finalement, on obtient $y = 3a^2x - 2a^3$.

2°)

a) **Développons et réduire l'expression $E=(t+1)(t^2+2t-2)$.**

$$\begin{aligned}E&=(t+1)(t^2+2t-2)\\&=t^3+2t^2-2t+t^2+2t-2\\&=t^3+3t^2-2\end{aligned}$$

b) **Déduisons-en les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par le point K.**

K $\in T_a$ si et seulement si $3a^2\times(-2)-2a^3=-4$

si et seulement si $-6a^2-2a^3=-4$

si et seulement si $6a^2+2a^3-4=0$

si et seulement si $a^3+3a^2-2=0$ (on simplifie par 2 l'égalité)

si et seulement si $(a+1)(a^2+2a-2)=0$ (utilisation de la question précédente)

si et seulement si $a+1=0$ ou $a^2+2a-2=0$

si et seulement si $a=-1$ ou $a^2+2a-2=0$

Résolution de l'équation $a^2+2a-2=0$:

Le discriminant réduit de cette équation est égal à $\Delta'=3$.

$\Delta'>0$

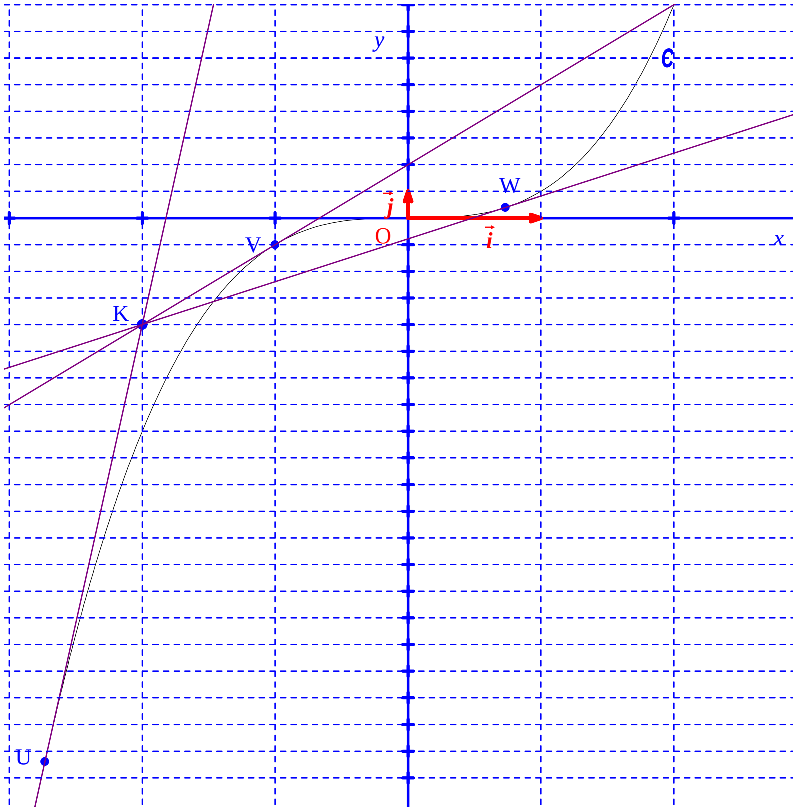
L'équation $a^2+2a-2=0$ admet donc deux racines distinctes : $a_1=\dfrac{-2-\sqrt{12}}{2}=-1-\sqrt{3}$ et $a_2=\dfrac{-2+\sqrt{12}}{2}=-1+\sqrt{3}$.

Ainsi :

K $\in T_a$ si et seulement si $a=-1$ ou $a=-1-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}-1$.

Il existe trois tangentes à $\mathcal{C}$ passant K : il s'agit des tangentes aux points d'abscisses – 1, $-1-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$.

Si on note U, V, W les points d'abscisses respectives – 1, $-1-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$, les tangentes passant par K sont les droites (AU), (AV) et (AW).



IV.

On utilise un arbre de probabilités en considérant l'événement S : « la lettre marquée sur le carton est A ».

1°) a) $p_1=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$ b) $p_2=\dfrac{1}{5}$ c) $p_3=\dfrac{4^3}{5^3}=\dfrac{64}{125}$

$$p_1=P(\text{S}-\text{S}-\text{S})=\left[P(\text{S})\right]^3=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$$

$$p_2=P(\text{S}-\text{S}-\text{S})+P\left(\text{S}-\text{S}-\overline{\text{S}}\right)+P\left(\text{S}-\overline{\text{S}}-\text{S}\right)+P\left(\text{S}-\overline{\text{S}}-\overline{\text{S}}\right)=\ldots$$

2°)

x_i	0	1	2	3	
$P(X=x_i)$	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$	Total $=1$

V.

L'énoncé aurait peut-être dû préciser que les billets non gagnants sont marqués 0 €.

1°) **Déterminons en fonction de *a* et de *N*, la loi de probabilité de X.**

x_i	$5000-a$	$1000-a$	$50-a$	$-a$	
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{N}$	$\dfrac{5}{N}$	$\dfrac{50}{N}$	$\dfrac{N-56}{N}$	Total $=1$

2°) **Démontrons que $\text{E}(\text{X})=\dfrac{12500-aN}{N}$.**

$$\text{E}(\text{X})=\sum_{i=1}^{4}x_iP(\text{X}=x_i)=\frac{5000-a+5(1000-a)+50(50-a)+(N-56)(-a)}{N}=\frac{12500-aN}{N}$$

3°) **Déterminons le prix d'achat d'un billet pour que la loterie soit équitable sachant que $N=2000$.**

On cherche a tel que $E(\text{X})=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{12500-2000a}{2000}=0$$

$$a=\frac{25}{4}$$

Pour que cette loterie soit équitable dans le cas où $N=2000$, le prix d'achat d'un billet doit être de 6,25 €

4°)

a) **Déterminons *N* de telle sorte que l'organisateur fasse un bénéfice de 2000 € sachant que $a=5$.**

Le bénéfice de l'organisateur est égale à la différence entre le montant de la vente de tous les billets et la somme des gains des billets gagnants vendus.

On cherche donc N tel que $5N-(5000+5\times1000+50\times50)=2000$ (1).

(1) est successivement équivalente à :
$5N-12500=2000$
$N=2900$

b) **Déduisons-en la valeur arrondie au centième de E(X), puis interprétons ce résultat.**

On a $N=2900$ et $a=5$.

$$\begin{aligned}\text{E}(\text{X})&=\frac{12500-5\times2900}{2900}\\&=-\frac{20\cancel{00}}{29\cancel{00}}\\&=-0,689655172\ldots\end{aligned}$$

Donc $\text{E}(\text{X})\approx-0,69$ (valeur arrondie aux centième)

Le jeu est donc défavorable au joueur et que la perte moyenne pour le joueur est d'environ 69 centimes d'euros.

Le joueur perdra en moyenne 69 centimes d'euros.

VI.

1°) **Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right)$.**

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right)&=\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{AD}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{AD}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right) \qquad \text{(relation de Chasles pour les angles orientés)}\\&=\left(\overrightarrow{\text{BC}}\,;\overrightarrow{\text{BA}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{AD}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{DA}}\,;\overrightarrow{\text{DC}}\right)\\&=-\left(\overrightarrow{\text{BA}}\,;\overrightarrow{\text{BC}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{AD}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{DA}}\,;\overrightarrow{\text{DC}}\right)\\&=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\\&=-\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

On a $-\dfrac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right)$ est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

2°) **Démontrons que (AB) $\perp$ (CD).**

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right)=\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{CB}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{CB}}\,;\overrightarrow{\text{CD}}\right)=\left(\overrightarrow{\text{BA}}\,;\overrightarrow{\text{BC}}\right)+\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

On en déduit que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque :

Il était inutile de préciser avant de conclure que $\dfrac{\pi}{2}=90°$.

Autre méthode :

On introduit le point d'intersection E des droites (AB) et (CD).
On travaille ensuite dans le triangle ADE.
On sait que la somme des mesures en radians des angles géométriques d'un triangle est égale à π.

On prend soin de rester avec des mesures d'angles géométriques et de ne pas appliques la propriété avec des angles orientés.

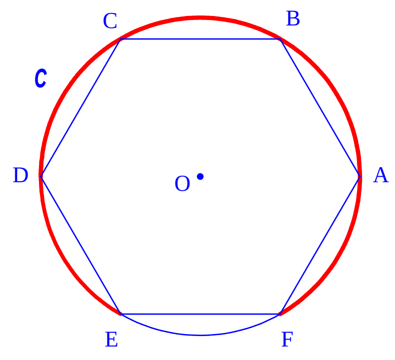
VII.

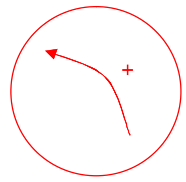
ABCDEF : hexagone inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O

M : point quelconque de $\mathcal{C}$

x : mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$

Déterminons l'ensemble décrit par x lorsque M décrit l'arc $\overset{\smile}{\text{EF}}$ de $\mathcal{C}$.





M est variable, mobile sur l'arc $\overset{\smile}{\text{EF}}$.

x : mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

Attention, on n'est pas dans le cercle trigonométrique !
Conseil, repasser l'arc avec le doigt.

Le premier vecteur de base est $\overrightarrow{\text{OA}}$.

On partage en deux l'arc $\overset{\frown}{\text{EF}}$ en deux arcs : le petit arc $\overset{\frown}{\text{DE}}$ et le grand arc $\overset{\smile}{\text{FD}}$.

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OE}}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OF}}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

Lorsque M décrit l'arc $\overset{\smile}{\text{EF}}$, x décrit $\left]-\pi\,;-\dfrac{2\pi}{3}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$.

On fait attention aux crochets ouverts ou fermés.
Les extrémités de l'arc sont comprises dans l'arc.