1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 17 janvier 2014 (30 min)

Prénom : ………………………………………..………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

Ne rien écrire sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.

I. (4 points : 1 point + 2 points + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(3x-1)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

Compléter le raisonnement suivant.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ sont solution de l'équation

…………………………..…………………………..………………………… (1).

(1) est successivement équivalente à :

…………………………..…………………………..……………………………………………………………

…………………………..…………………………..……………………………………………………………

…………………………..…………………………..……………………………………………………………

…………………………..…………………………..……………………………………………………………

…………………………..…………………………..……………………………………………………………

Conclusion :

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ ont pour coordonnées ……………………………………………………………

…………………………………………………………………………………….

Vérifier graphiquement sur la calculatrice graphique.

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-4)\sqrt{x} + 2x$.

Un élève a obtenu l'expression suivante (qui est correcte) de la dérivée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \underbrace{1 \times \sqrt{x} + (x-4) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} + 2$$

1°) Quelle formule de dérivation l'élève a-t-il utilisé pour obtenir les termes avec une accolade ?
Écrire la formule sous forme d'une égalité, sans faire de commentaire.

………………………………………………….

2°) Compléter l'égalité suivante où le numérateur doit être donné sous forme simplifiée.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2\sqrt{x}}$$

III. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

À une loterie, un joueur peut gagner 10 € avec une probabilité 0,3 ; 20 € avec une probabilité 0,1 ; ou ne rien gagner.
On donnera toutes les probabilités sous forme décimale.

1°) En tenant compte de la mise de 1 €, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le gain en euros (éventuellement négatif) d'un joueur.

x_i			
$P(\text{X} = x_i)$			

2°) Un joueur tente sa chance deux fois de suite, les tirages étant indépendants.
À chaque tirage, la mise est renouvelée.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y, gain algébrique en euros obtenu après deux parties.

y_i	
$P(\text{Y} = y_i)$	

3°) Calculer l'espérance de Y.

$\text{E}(\text{Y}) = \dots\dots\dots$ (donner le résultat)

IV. (4 points)

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D deux à deux distincts.
Calculer $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)=$ ....

= ....

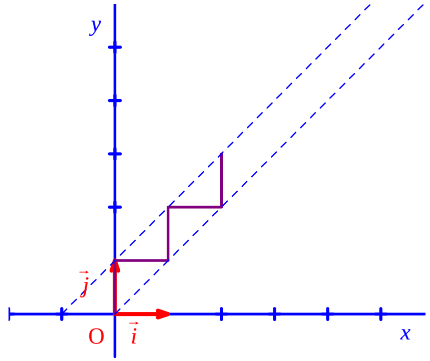
= ....

= ....

= ....

V. (4 points)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On considère la ligne brisée suivante réalisée à partir d'un motif de base auquel on a fait subir successivement 20 fois la translation de vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$.
Le motif de base est constitué :
- du segment joignant le O au point A de coordonnées (0 ; 1) ;
- du segment joignant le point A au point B de coordonnées (1 ; 1).



Compléter l'algorithme suivant qui permet de réaliser cette figure par construction itérative.

Pour *k* allant de ….…. à ….…. **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (….…. ; ….…) et (….…. ; ….…)

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (….…. ; ….…) et (….…. ; ….…)

FinPour

Programmer l'algorithme sur calculatrice s'il reste du temps.

Corrigé du contrôle du 17-1-2014

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(3x-1)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

Compléter le raisonnement :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ sont solution de l'équation

$x^2(3x-1) = x$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x^2(3x-1) - x = 0$

$x\left[x(3x-1) - 1\right] = 0$

$x\left(3x^2 - x - 1\right) = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

Conclusion :

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ ont pour coordonnées (0 ; 0), $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} ; \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} ; \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

Vérifier graphiquement sur la calculatrice graphique.

On écrit l'équation donnant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ sous la forme $x^2(3x-1) = x$ et non $x = x^2(3x-1)$.

$x^2(3x-1) = x$ est donnée dans l'ordre logique.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-4)\sqrt{x} + 2x$.

Un élève a obtenu l'expression suivante (qui est correcte) de la dérivée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \underbrace{1 \times \sqrt{x} + (x-4) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} + 2$$

1°) Quelle formule de dérivation l'élève a-t-il utilisé pour obtenir les termes avec une accolade ?
Écrire la formule sous forme d'une égalité, sans faire de commentaire.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Compétences évaluées dans cette question :

- savoir écrire une formule de dérivation

- utiliser les notations du cours

L'écriture de cette formule fait appel à deux fonctions u et v (cela permet de donner une écriture condensée).

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

écriture symbolique utilisant la notation de Lagrange

J'ai constaté – à mon grand étonnement – qu'écrire une telle formule était une difficulté pour beaucoup d'élèves.
Ils connaissent certainement la formule et écrivent bien le second membre mais ils écrivent mal le premier membre ce qui peut laisser penser qu'ils ne comprennent pas bien ce qu'ils écrivent.
Ainsi, j'ai trouvé de nombreuses formules sous la forme : $u \times v = u' \times v + u \times v'$.

2°) Compléter l'égalité suivante où le numérateur doit être donné sous forme simplifiée.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 4}{2\sqrt{x}}$$

III.

À une loterie, un joueur peut gagner 10 € avec une probabilité 0,3 ; 20 € avec une probabilité 0,1 ; ou ne rien gagner.
On donnera toutes les probabilités sous forme décimale.

1°) En tenant compte de la mise de 1 €, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe le gain en euro (éventuellement négatif) d'un joueur.

x_i	– 1	9	19
$P(\mathrm{X} = x_i)$	0,6	0,3	0,1

2°) Un joueur tente sa chance deux fois de suite, les tirages étant indépendants.
À chaque tirage, la mise est renouvelée.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y, gain algébrique obtenu après deux parties.

On dresse un arbre de probabilités.

y_i	-2	8	18	28	38
$P(Y=y_i)$	0,36	0,36	0,21	0,06	0,01

3°) Calculer l'espérance de Y.

$$E(Y)=8 \quad \text{(donner le résultat)}$$

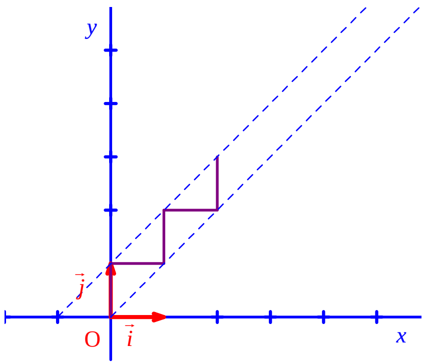
IV.

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D deux à deux distincts.
Calculer $\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}\right)&=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)+\left(-\overrightarrow{CD}\,;-\overrightarrow{AD}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{AD}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AD}\right)\\&=0\end{aligned}$$

V.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la ligne brisée suivante réalisée à partir d'un motif de base auquel on a fait subir successivement 20 fois la translation de vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$.
Le motif de base est constitué :
- du segment joignant le O au point A de coordonnées (0 ; 1) ;
- du segment joignant le point A au point B de coordonnées (1 ; 1).



Compléter l'algorithme suivant qui permet de réaliser cette figure par construction itérative.

> **Pour** *k* allant de **0** à **20** **Faire**
>
> Tracer le segment joignant les points de coordonnées (***k*** ; ***k***) et (***k*** ; ***k* + 1**)
>
> Tracer le segment joignant les points de coordonnées (***k*** ; ***k* + 1**) et (***k* + 1** ; ***k* + 1**)
>
> **FinPour**

Programmer l'algorithme sur calculatrice s'il reste du temps.