TS1

Contrôle du jeudi 16 janvier 2014
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : …… /20

I. (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x - 3\cos x$.

1°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \sin x(3 - 4\cos x)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

………..

………..

………..

2°) On pose $\alpha = \text{Arccos}\,\dfrac{3}{4}$.

Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes (calcul des extremums au brouillon).

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
Signe de $\sin x$	
Signe de $3 - 4\cos x$	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

3°) Calculer, sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $f(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

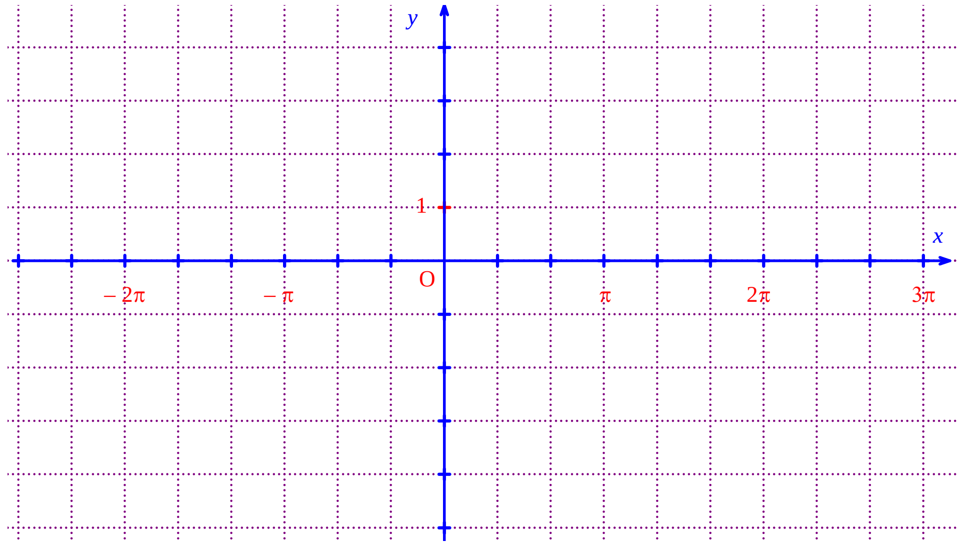
………..

………..

………..

………..

4°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le repère ci-contre (l'origine est O).
On tracera les tangentes horizontales sous la forme de doubles flèches.



5°) Calculer $f''(x)$ en fonction de $\cos x$.

$f''(x) = $ ………………………………………………………………… (expression développée)

5°) **Bonus :** Déterminer la valeur exacte du réel β de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ tel que $f(\beta) = 0$.

$\beta = $ …………………..

II. (3 points)

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f définie sur I.

$f(x) = x \times \sin 2x$; $\text{I} = \mathbb{R}$; $f'(x) = $ ………………………………….

$f(x) = \dfrac{\sin(x^2 + 1)}{2}$; $\text{I} = \mathbb{R}$; $f'(x) = $ ………………………………….

$f(x) = -\dfrac{1}{\sin x}$; $\text{I} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f'(x) = $ ………………………………….

III. (2 points)

On considère les équations $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$ (1) et $1 + \sqrt{2}\sin 2x = 0$ (2).

Donner leurs ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs.

$S_1 =$ .... ; $S_2 =$ ....

IV. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left(ax+b\right)$ où a est un réel strictement positif et b un réel de l'intervalle [0 ; π].

Déterminer a et b sachant que $f\left(0\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'\left(0\right)=-1$ (recherche au brouillon).

$a =$ .... $b =$ ....

V. (2 points)

Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. À tout réel t, on associe le point M de coordonnées (cos t ; cos 2t).

1°) Démontrer que M appartient à la parabole Γ d'équation $y=2x^2-1$.

2°) Quel est l'ensemble des points M lorsque t décrit $\mathbb{R}$? Expliquer brièvement.

....

....

....

....

....

....

....

....

VI. (3 points)

1°) Déterminer la limite en + ∞ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2°) Déterminer la limite en 1^+ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x^2}{1-x^3}$.

3°) Déterminer la limite en + ∞ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 16-1-2014

I.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x - 3\cos x$.

1°) Justifier que pour tout réel *x* on a : $f'(x) = \sin x(3 - 4\cos x)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2\sin 2x - 3(-\sin x)$$
$$= -4\cos x \times \sin x + 3\sin x$$
$$= \sin x(3 - 4\cos x)$$

2°) On pose $\alpha = \text{Arccos}\,\dfrac{3}{4}$.

Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes (calcul des extremums au brouillon).

x	0		α		π
Signe de $\sin x$	0	$+$		$+$	0
Signe de $3 - 4\cos x$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de *f*	-2	$\searrow$	$-\dfrac{17}{8}$	$\nearrow$	4

La ligne du signe de $3 - 4\cos x$ s'obtient en résolvant deux inéquations et une équation.
On s'aide du cercle trigonométrique.

3°) Calculer, sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $f(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

• On rappelle que, par définition, α est l'unique réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$.

• On n'utilise pas la notation Arccos dans le calcul (car elle alourdit considérablement l'expression).

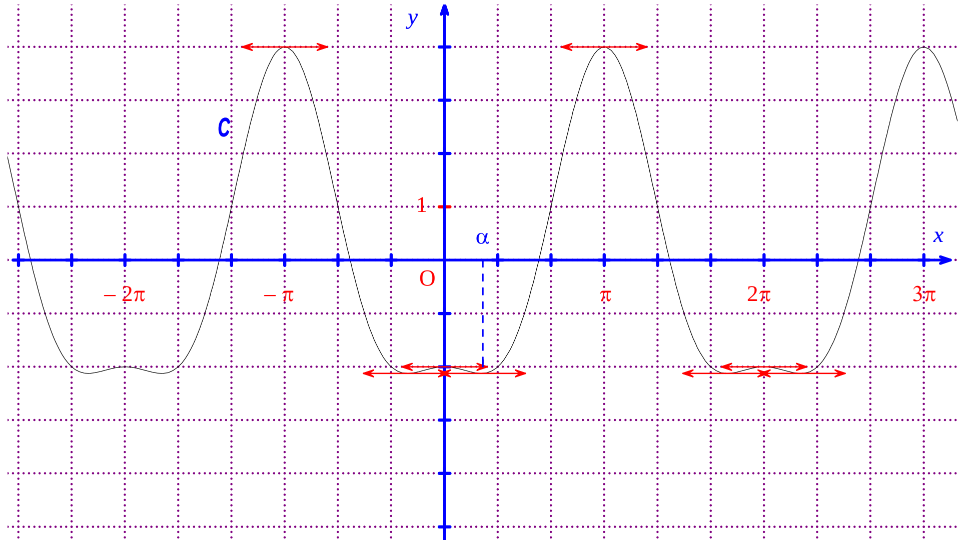
• On n'utilise pas la notation $\cos^{-1}$ ($\cos^{-1}$ est une notation uniquement de calculatrice).

$$f(\alpha) = \cos 2\alpha - 3\cos\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 1 \qquad \text{(formule de duplication du cosinus)}$$
$$= 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\times\frac{3}{4} - 1$$
$$= -\frac{17}{8}$$

4°) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction *f* dans le repère ci-contre (l'origine est O).
On tracera les tangentes horizontales sous la forme de doubles flèches.

$f(\alpha) = -2,125$

On trace autant de tangentes horizontales (sous forme de doubles-flèches) qu'il y a de points en lesquels la tangente est horizontale.
On trace autant de doubles flèches qu'il y a de tangentes.
On ne peut pas faire une « grande » (et unique) tangente au niveau de la droite d'équation $y = 4$ comme me l'a suggéré un élève).
On fait des petites flèches.



L'énoncé aurait pu demander de démontrer que la fonction *f* est paire et périodique de période 2π, ce qui aurait permis de justifier les symétries de la courbe.

Pour placer α, on raisonne par proportionnalité.

π	α
1,5 cm	x cm

$$x=\frac{1,5\times a}{\pi}=\frac{1,5\times \text{Arccos}\frac{3}{4}}{\pi}=0,3450801842...$$

On pouvait placer les points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

5°) Calculer $f''(x)$ en fonction de $\cos x$.

$$f'(x)=-2\sin 2x+3\sin x \quad \text{(dérivée de la forme de base)}$$

$$f''(x)=-4\cos 2x+3\cos x$$

$$f''(x)=4+3\cos x-8\cos^2 x$$

5°) Bonus : Déterminer la valeur exacte du réel β de l'intervalle [0 ; π] tel que $f(\beta)=0$.

$$\beta=\text{Arccos}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$$

On résout l'équation $\cos 2x-3\cos x=0$ (1) en écrivant qu'elle est équivalente à $2\cos^2 x-3\cos x-1=0$ puis en posant $X=\cos x$.
On obtient l'équation $2X^2-3X-1=0$ qui est une équation du second degré dont les racines sont $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{3-\sqrt{17}}{4}$.

$(1) \Leftrightarrow \cos x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ (impossible) ou $\cos x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$

La solution de (1) dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ est $\text{Arccos}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

II.

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f définie sur I.

$f(x)=x\times\sin 2x$; $\text{I}=\mathbb{R}$; $f'(x)=\sin(2x)+2x\cos(2x)$

$f(x)=\frac{\sin(x^2+1)}{2}$; $\text{I}=\mathbb{R}$; $f'(x)=x\cos(x^2+1)$

$f(x)=-\frac{1}{\sin x}$; $\text{I}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$; $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

III.

On considère les équations $\cos 3x=\frac{1}{2}$ (1) et $1+\sqrt{2}\sin 2x=0$ (2).

Donner leurs ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs.

$$\boldsymbol{S_1=\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

$$\boldsymbol{S_2=\left\{-\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{8}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{S_2=\left\{-\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{3\pi}{8}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Solution détaillée :

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x=\frac{1}{2}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \cos 3x=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k'\pi}{3} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{\boldsymbol{S_1=\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $1+\sqrt{2}\sin 2x=0$ (2).

$$(2) \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{8}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2=\left\{-\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{8}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Dans les deux cas, on se ramène aux règles du cours pour la résolution des équations :

$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \ldots$

$\sin a=\sin b \Leftrightarrow \ldots$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin(ax+b)$ où a est un réel strictement positif et b un réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Déterminer a et b sachant que $f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0)=-1$ (recherche au brouillon).

$a=\sqrt{2}$ $\qquad$ $b=\dfrac{3\pi}{4}$

Solution détaillée :

La condition $f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ se traduit par $\sin b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $b\in[0 ; \pi]$, on en déduit que $b=\dfrac{\pi}{4}$ ou $b=\dfrac{3\pi}{4}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=a\cos(ax+b)$

La condition $f'(0)=-1$ se traduit par $a\cos b=-1$ (1).

1$^{\text{er}}$ cas : $b=\dfrac{\pi}{4}$

(1) donne alors $a\cos\dfrac{\pi}{4}=-1$ soit $a\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-1$ d'où $a=-\sqrt{2}$.

On rejette cette valeur puisque $a>0$.

2$^{\text{e}}$ cas : $b=\dfrac{3\pi}{4}$

(1) donne alors $a\cos\dfrac{3\pi}{4}=-1$ soit $a\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$ d'où $a=\sqrt{2}$.

On accepte cette valeur puisque $a>0$.

V.

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. À tout réel t, on associe le point M de coordonnées ($\cos t$; $\cos 2t$).

1°) Démontrer que M appartient à la parabole Γ d'équation $y=2x^2-1$.

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad 2(x_{\mathrm{M}})^2-1 = 2\cos^2 t-1$$
$$= \cos 2t$$
$$= x_{\mathrm{M}}$$

Donc M appartient à la parabole Γ d'équation $y=2x^2-1$.

2°) Quel est l'ensemble des points M lorsque t décrit $\mathbb{R}$? Expliquer brièvement.

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\cos t$ décrit l'intervalle [– 1 ; 1] (la fonction cosinus est à valeurs dans [– 1 ; 1]).

On en déduit que l'ensemble des points M lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est l'arc de parabole pour $x\in[-1 ; 1]$ (c'est-à-dire l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ où A et B sont les points de coordonnées respectives (1 ; 1) et (– 1 ; 1)).

On peut vérifier ce résultat sur la calculatrice en se mettant en mode paramétriques.

VI.

1°) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2°) Déterminer la limite en 1^+ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x^2}{1-x^3}$.

3°) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

1°) f est une fonction rationnelle non nulle.

On peut donc appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

Le monôme de plus haut degré du dénominateur est x^4 (inutile de développer le dénominateur).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x^2}{x^4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

2°) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \left(3x^2\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(1-x^3\right) = 0^- \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$.

3°)

h n'est pas une fonction rationnelle.
On ne peut donc pas appliquer la règle de monômes de plus haut degré (contrairement à ce qu'ont fait beaucoup d'élèves).

On rencontre une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

On transforme l'expression de h.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x}\right) = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.