Exercices d'approfondissement sur les angles orientés

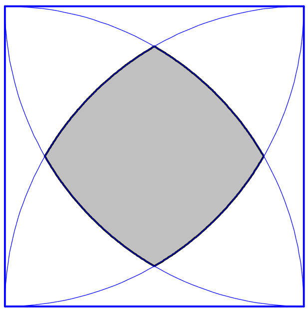
1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

Déterminer une mesure en radians des angles orientés $\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$, $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, $\left(\vec{v}\,;-\vec{u}\right)$, $\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$, $\left(-3\vec{u}\,;\dfrac{1}{2}\vec{v}\right)$.

2 On se place dans le plan orienté.

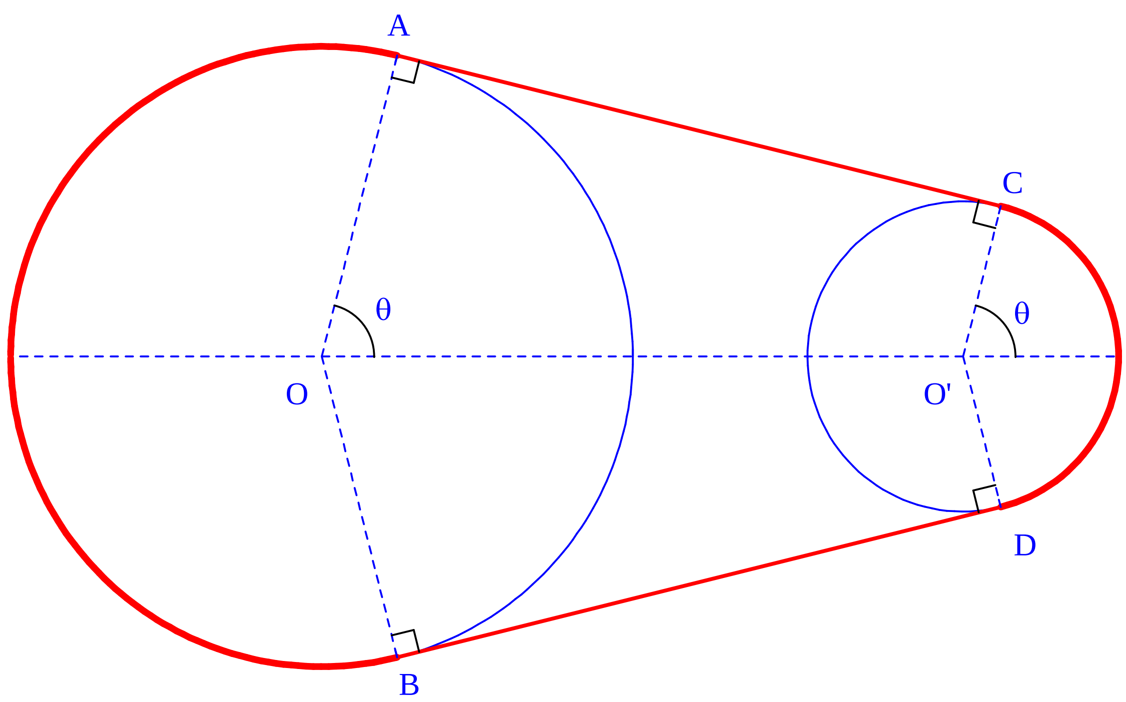
Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre Ω, de sens indirect (c'est-à-dire que A, B, C, D, E et F se suivent dans le sens des aiguilles d'une montre).
Après avoir réalisé une figure, donner la mesure principale en radians de chacun des angles orientés suivants :
$\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega B}\right)$, $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{AF}\right)$, $\left(\overrightarrow{A\Omega}\,;\overrightarrow{\Omega B}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{DC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BE}\right)$, $\left(\overrightarrow{\Omega D}\,;\overrightarrow{C\Omega}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{\Omega B}\right)$, $\left(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{BA}\right)$.
Aucune justification n'est demandée.

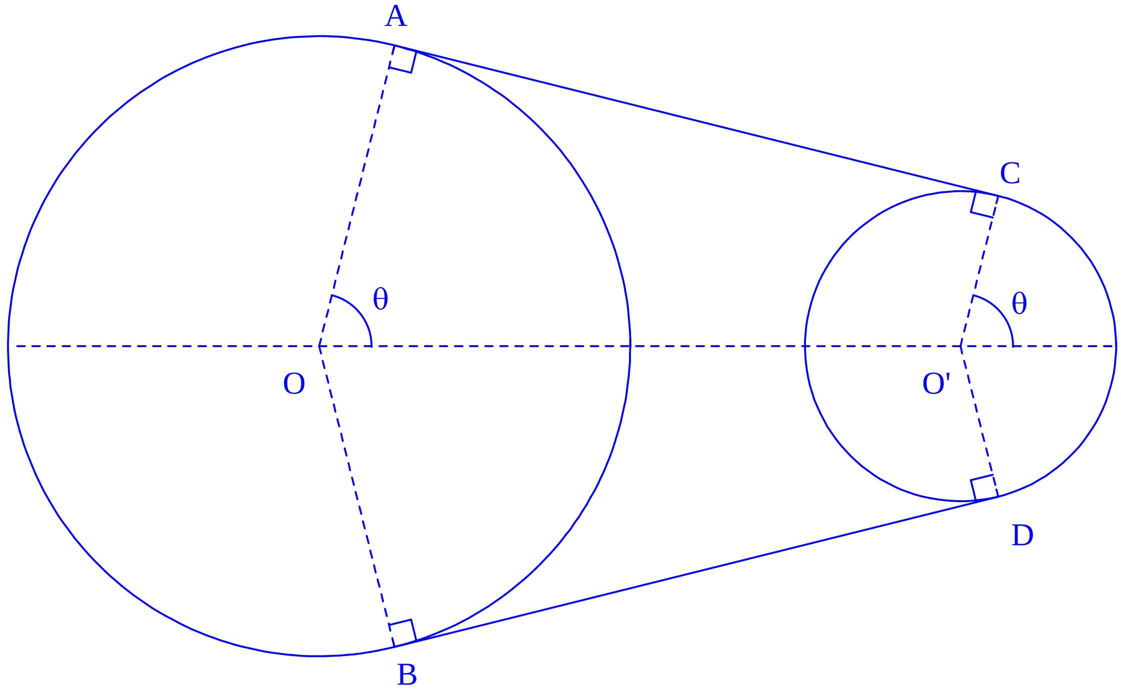
3 Calculer le périmètre du domaine central ci-dessous (en couleur) inscrit dans un carré de côté 1.

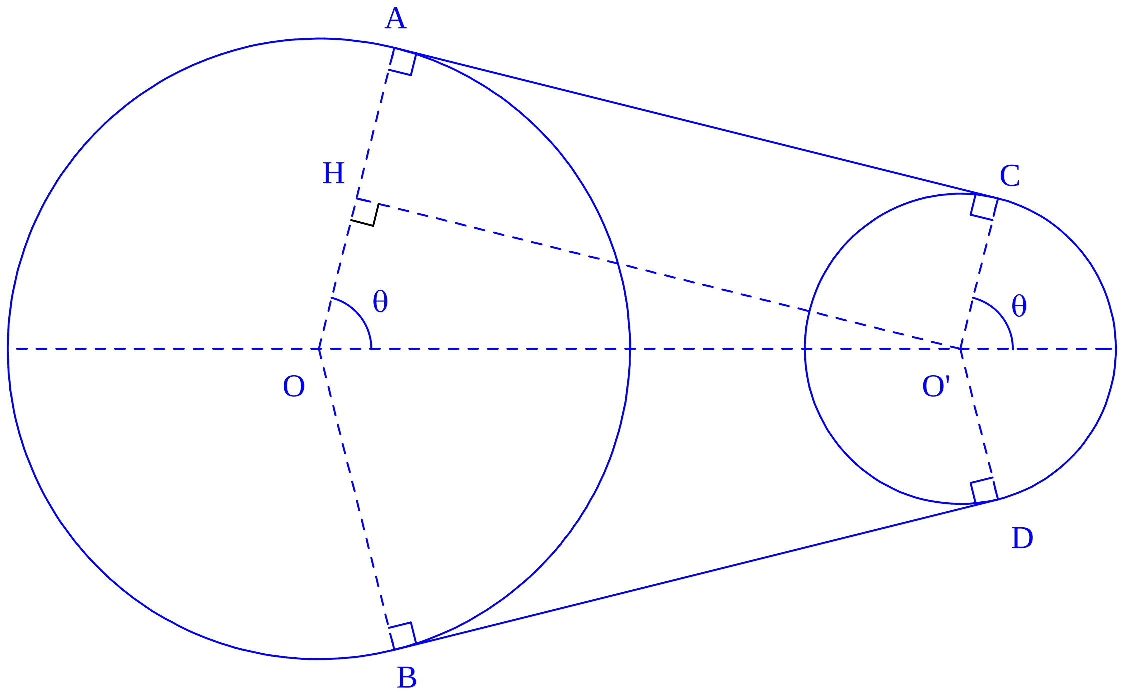


4 Il est 17 h 54. Quel angle (en degrés) forment les deux aiguilles de votre montre ?

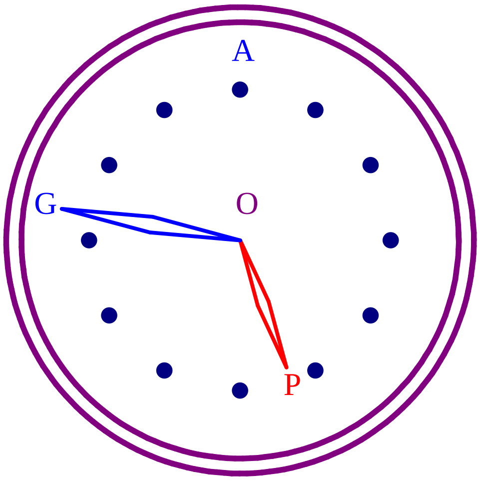
5 Déterminer la longueur de la courroie ci-dessous, sachant que : $OO'=d$, $OA=R$, $O'C=R'$.
Effectuer une application numérique pour $R=20$, $R'=5$ et $d=30$ (unité de longueur : le centimètre).




A
C
θ
θ
O
O'
D
B


A
H
C
θ
θ
O
O'
D
B

$\boxed{\mathbf{6}}$ On s'intéresse aux aiguilles d'une montre et à leurs propriétés. Les aiguilles sont situés sur un disque de centre O.
On note G l'extrémité de la grande aiguille, P l'extrémité de la petite aiguille et A la position à l'origine c'est-à-dire quand les deux aiguilles indiquent 0 heure (ou minuit).



Le temps écoulé depuis 0 heure sera noté t ($0 \leqslant t \leqslant 24$), exprimé en heure.

On oriente le plan.

1°) Démontrer que pour tout $t \in [0\,;24]$, on a $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OG}\right) = -2\pi t + k \times 2\pi$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OP}\right) = -\dfrac{2\pi t}{12} + k' \times 2\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

2°) Exprimer en fonction de t les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{OG}\right)$.

3°) Il est 11 h 12 mn.
Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle géométrique aigu $\widehat{POG}$ formé par les deux aiguilles ?

4°) Donner, à la seconde près, la première heure de la journée pour laquelle les aiguilles se superposent.

5°) Donner, à la seconde près, la première heure de la journée pour laquelle les aiguilles sont perpendiculaires.

6°) Donner, à la seconde près, la première heure de la journée pour laquelle les aiguilles sont opposées.

Solutions

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(\vec{v}\,;-\vec{u}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$\left(-3\vec{u}\,;\frac{1}{2}\vec{v}\right)=\frac{4\pi}{3}$$