Exercices supplémentaires sur les fonctions trigonométriques

$\boxed{1}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x \times \cos 2x$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1°) Étudier la périodicité et la parité de *f*.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie*.

3°) Démontrer que pour tout réel *x*, $f'(x) = \cos x\left(1 - 6\sin^2 x\right)$.

4°) a) Faire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On introduira le réel $\alpha = \text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{6}}$.

b) Calculer $f(\alpha)$ et compléter le tableau de variation de *f* avec cette valeur.

5°) a) Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ en expliquant la construction.

b) Comment obtient-on la courbe $\mathcal{C}$?

$\boxed{2}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x + 2\sin x \times \cos 2x$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1°) Étudier la périodicité et la parité de *f*.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.*

3°) Démontrer que pour tout réel *x*, $f'(x) = 3\cos x\left(1 - 4\sin^2 x\right)$.

4°) Faire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

5°) a) Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ en expliquant la construction.

b) Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\pi\,;2\pi]$.

* Aide : effectuer un changement de repère ou démontrer que pour tout réel *x* on a : $f(\pi - x) = f(x)$.

$\boxed{3}$

1°) On pose $P(x)=x^3-2x^2+1$. Factoriser $P(x)=x^3-2x^2+1$ en utilisant une racine évidente.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \sin 3x + \tan 3x - 6x$.
Quel est l'ensemble de définition D de f ?

3°) Démontrer que sur son ensemble de définition $f'(x)=\dfrac{3\cos^3 3x+3-6\cos^2 x}{\cos^2 3x}$.

4°) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intersection de D avec $[0\,;\pi]$.

$\boxed{4}$

Partie A

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1°) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

2°) Démontrer que pour tout réel $x\in[0\,;\pi[$, on a : $f'(x)=\dfrac{2\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$.

3°) Démontrer que pour tout réel $x\in[0\,;\pi[$, on a : $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}\times\cos x}{2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^3}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

4°) Tracer $\mathcal{C}$ sur $]-\pi\,;\pi[\cup]\pi\,;3\pi[$.
On précisera tous les éléments connus par l'étude précédente.

Partie B Des triangles de même périmètre

On prend le centimètre pour unité.
On considère les triangles ABC isocèles en A de périmètre 6.
On note $a=\text{AB}=\text{AC}$, $x=\widehat{\text{ABC}}=\widehat{\text{ACB}}$ et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle en cm^2.

1°) Vérifier que $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

2°) a) Exprimer BC en fonction de a.
b) Exprimer a en fonction de $\cos x$.

3°) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

4°) Démontrer que l'aire de ABC est maximale pour une valeur x_0 de x que l'on précisera ; calculer ce maximum et préciser la nature du triangle ABC dans ce cas.

$\boxed{5}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x + \cos^2 x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1°) a) Démontrer que pour tout réel x on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$ (1).

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Interpréter graphiquement l'encadrement (1).

2°) On note D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = x+1$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et des droites D_1 et D_2.

3°) a) Démontrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.

b) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ (rédiger des phrases, on ne fera pas de tableau de variation).

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ (E).

4°) a) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
b) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

$\boxed{6}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 3 + 2\sqrt{2} - \left(2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{3 - \cos x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1°) a) Démontrer que 2π est une période de f.
b) Démontrer que pour tout réel x on a : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
c) Démontrer que la fonction f est paire.

d) Quelles sont les conséquences graphiques des trois questions précédentes ?

2°) a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Démontrer que pour tout réel x $f'(x)$ est du signe de $-\sin x$.
c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

3°) a) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.
b) Cette courbe rappelle-t-elle celle d'une fonction connue ?

4°) a) Justifier que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $\frac{-\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{6}$.
b) En déduire que $\mathcal{C}$ n'est pas la courbe représentative de la fonction cosinus.