TS1

Contrôle du jeudi 5 décembre 2013 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……... / 20

I. (2 points)

Étudier les limites des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$ et $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

On se contentera de démarrer « sèchement » sans mentionner la forme indéterminée rencontrée en donnant directement une réécriture qui permet de déterminer la limite.

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}$. À l'aide de ce résultat, compléter directement les égalités de limites suivantes :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k!} =$ ....

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{k=n} \dfrac{1}{k!} =$ ....

(On rappelle que $0! = 1$ et que $1! = 1$.)

III. (1 point)

On admet que pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

À l'aide de ce résultat, compléter l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=-n}^{k=n} k^2 =$ .... (expression en fonction de n).

IV. (1 point)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -1$.

On note (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

Compléter la phrase :

Si (u_n) converge vers un réel $l \neq -1$, alors (v_n) converge vers ....

V. (3 points)

Voici un extrait d'énoncé d'exercice :

> Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.
>
> Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique ; donner sa limite.

Voici un extrait de copie d'un élève :

> $$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} - \frac{u_n+2v_n}{3}$$
> $$= \frac{1}{3}(u_n - v_n)$$
>
> Par conséquent : $u_n - v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$.
>
> On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Cette rédaction présente des lacunes et des défauts : oublis de quantificateurs, d'arguments ; erreur au niveau d'une notation.
Réécrire une solution correcte complète de la question. On respectera à peu près le nombre de lignes.

....

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

VI. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - (u_n)^2$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que pour tout entier naturel *n* on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) Démontrer que la suite (u_n) converge (citer le théorème utilisé) et déterminer sa limite ℓ en rédigeant.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

VII. (5 points)

Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$.

1°) Donner sans justifier le plus petit terme, le plus grand terme et le nombre de termes de la somme S_n.

Plus petit terme : ……………….. Plus grand terme : ……………….. Nombre de termes : ……………. .

2°) Écrire un encadrement de S_n obtenu en encadrant grossièrement chaque terme.

………………….. $\leqslant S_n \leqslant$ ……………………

3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ en détaillant brièvement le raisonnement.

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

…………………..……………………………………………………………………………………………….

………..……………………………………………………………………………………………………….

………..……………………………………………………………………………………………………….

………..……………………………………………………………………………………………………….

Bonus : Écrire un algorithme (en langage naturel) qui, pour une valeur de *n*, entier naturel non nul, saisie en entrée, permet d'afficher en sortie la valeur de S_n. Le programmer sur calculatrice et indiquer la valeur affichée pour S_{20}.

Corrigé du contrôle du 5-12-2013

I.

Étudier les limites des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{n^3}{n^2+1}$ et $v_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$.

On se contentera de démarrer « sèchement » sans mentionner la forme indéterminée rencontrée en donnant directement une réécriture qui permet de déterminer la limite.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=\frac{n}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty.$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=\frac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=2.$$

II.

On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$. À l'aide de ce résultat, compléter directement les égalités de limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}-1$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{k=n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}-2$ $\qquad$ (On rappelle que $0!=1$ et que $1!=1$.)

Justification :

Le e désigne le nombre de Néper introduit dans le cours sur la fonction exponentielle : $\mathrm{e}=\mathrm{e}^1$.

Dans chaque cas, on effectue une réécriture de la somme.

On passe ensuite à la limite.

$\forall k\geqslant 1 \quad \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k!}=\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n}\dfrac{1}{k!}\right)-1$ (le 1 correspond au terme pour $k=0$: $\dfrac{1}{0!}=1$)

$\forall k \geqslant 2 \quad \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right) - (1+1)$ soit $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right) - 2$ (on enlevé les termes pour $k=0$ et $k=1$: $\frac{1}{0!} = 1$ et $\frac{1}{1!} = 1$)

III.

On admet que pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

À l'aide de ce résultat, compléter l'égalité : $\sum_{k=-n}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ (expression en fonction de n).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{k=n} k^2 &= \sum_{k=-n}^{k=-1} k^2 + \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \quad \text{(sépare la somme en deux suivant que } k \geqslant 0 \text{ ou que } k<0\text{)} \\
&= \sum_{l=1}^{l=n} (-l)^2 + \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \\
&= \sum_{l=1}^{l=n} l^2 + \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \\
&= \sum_{l=0}^{l=n} l^2 + \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \quad \text{(car } \sum_{l=0}^{l=n} l^2 = \sum_{l=1}^{l=n} l^2 \text{, le terme pour } l=0 \text{ dans la somme de gauche étant nul)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{k=n} k^2 \\
&= 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}$$

IV.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -1$.

On note (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

Compléter la phrase :

Si (u_n) converge vers un réel $l \neq -1$, alors (v_n) converge vers $\dfrac{l}{l+1}$.

V.

Voici un extrait d'énoncé d'exercice :

> Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
>
> Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique ; donner sa limite.

Voici un extrait de copie d'un élève :

> $$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$
> $$= \frac{1}{3}(u_n - v_n)$$
>
> Par conséquent : $u_n - v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$.
>
> On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Cette rédaction présente des lacunes et des défauts : oublis de quantificateurs, d'arguments ; erreur au niveau d'une notation.
Réécrire une solution correcte complète de la question. On respectera à peu près le nombre de lignes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(u_n - v_n)$$

La suite $(u_n - v_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$.

$-1<\frac{1}{3}<1$ donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

Par conséquent, par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

VI. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=\frac{1}{4}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n-(u_n)^2$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que pour tout entier naturel *n* on a : $0\leqslant u_n\leqslant 1$.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) Démontrer que la suite (u_n) converge (citer le théorème utilisé) et déterminer sa limite $\mathscr{l}$ en rédigeant.

1°) Déterminons le sens de variation de (u_n).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=2u_n-(u_n)^2-u_n$$

$$=u_n(1-u_n)$$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\geqslant 0$ et $u_n\leqslant 1$ soit $1-u_n\geqslant 0$.

D'où $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ soit $u_{n+1}\geqslant u_n$.

Donc la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

2°)

• Démontrons que la suite (u_n) converge.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\leqslant 1$ donc (u_n) est majorée par 1.

Or, toute suite croissante majorée converge, d'où (u_n) converge.

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathscr{l}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\mathscr{l}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=2\mathscr{l}-\mathscr{l}^2$ (par opération algébrique).

Donc par unicité de la limite d'une suite, on a : $2\mathscr{l}-\mathscr{l}^2=\mathscr{l}\quad(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow \mathscr{l}-\mathscr{l}^2=0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{l}(1-\mathscr{l})=\mathscr{l}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{l}=0 \text{ ou } \mathscr{l}=1$$

Or (u_n) est croissante et son premier terme est $u_0=\frac{1}{4}$.

Par conséquent, $\ell=1$.

VII.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}$.

1°) Donner sans justifier le plus petit terme, le plus grand terme et le nombre de termes de la somme S_n.

Plus petit terme : $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ Plus grand terme : $\frac{1}{n+1}$ Nombre de termes : n

2°) Écrire un encadrement de S_n obtenu en encadrant grossièrement chaque terme.

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{n}{n+1}$$

3°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ en détaillant brièvement le raisonnement.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n}{n+\sqrt{n}}=\frac{n}{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

(autre manière possible : $\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$)

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

Bonus :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
    S prend la valeur $S+\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

Une valeur approchée de S_{20} est 0,8680816592.

On aurait aussi pu utiliser la commande spéciale de commande de somme sur calculatrice.