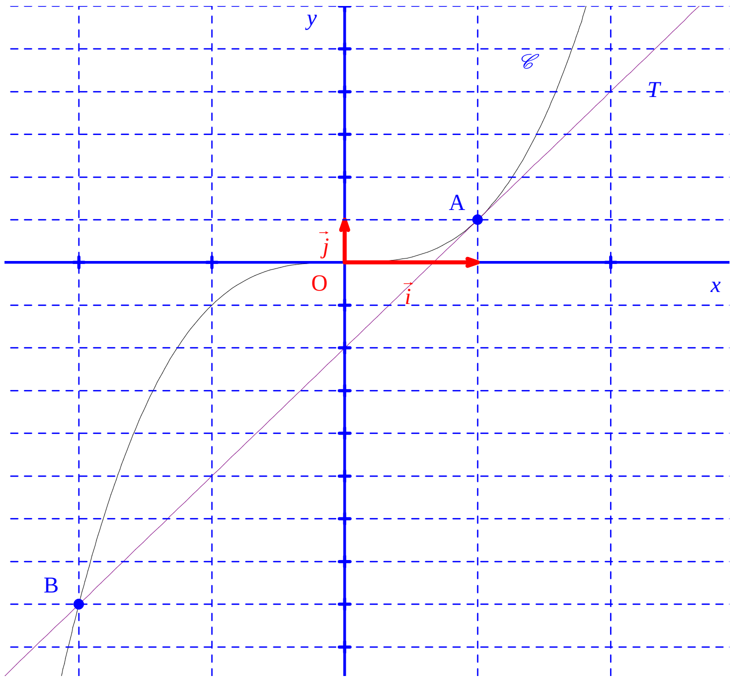
1ère S1

Contrôle du vendredi 10 janvier 2014 (30 min)

Prénom : ……………………………………..………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1 point + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.
Un élève devait étudier algébriquement la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
Il a d'abord effectué un graphique sur un logiciel de tracé de courbes (cf. ci-dessous).



Le graphique lui a permis de penser que :

- $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $\left[-2\,;+\infty\right[$;
- $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$;
- T recoupe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse – 2.

Il a ensuite élaboré une démarche dont on donne ci-dessous les grandes étapes du début :

- calcul de $f'(x) = 3x^2$;
- équation réduite de T : $y = 3x - 2$;
- calcul de la différence $f(x) - (3x-2) = x^3 - 3x + 2$;
- factorisation de cette différence sous la forme $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ grâce à un logiciel de calcul formel.

1°) Plutôt que d'écrire $f(x) - (3x-2)$, l'élève aurait-il pu écrire $f(x) - y$ à la troisième étape de sa démarche ?

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

2°) Comment l'élève doit-il achever l'étude ? Répondre par une phrase sans effectuer la démarche.

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

…………………………………………...…………………………………………………………………..….

II. (2 points)

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2 + 3x}$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Après avoir calculé la dérivée de f (résultat : $f'(x) = -\dfrac{6x+9}{\left(x^2+3x\right)^2}$), un élève a rédigé ainsi la recherche d'une équation de la tangente T au point d'abscisse A d'abscisse – 2.

> T a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1).
>
> Or $x_0 = -2$ d'où $y = -\dfrac{6\times(-2)+9}{\left[(-2)^2 + 3\times(-2)\right]^2}(x+2) + \dfrac{3}{(-2)^2 + 3\times(-2)}$ (2)
>
> $y = \dfrac{3}{4}(x+2) - \dfrac{3}{2}$
>
> $y = \dfrac{3}{4}x$

On précise que les calculs sont justes.

1°) Quel commentaire peut-on faire sur la première ligne (égalité (1)) ? Répondre sans calcul.

2°) Quel commentaire peut-on faire sur la deuxième ligne (égalité (2)) ? Répondre sans calcul.

…….

…….

…….

…….

…….

III. (2 points)

Donner l'expression de deux exemples de fonctions u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant pour fonction dérivée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+5$.

$u(x)=$ ……………………… $v(x)=$ ………………………

IV. (2 points)

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx$ où a et b sont deux réels donnés.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(1\,;2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Déterminer a et b.

$a=$ ………… $b=$ …………

V. (4 points)

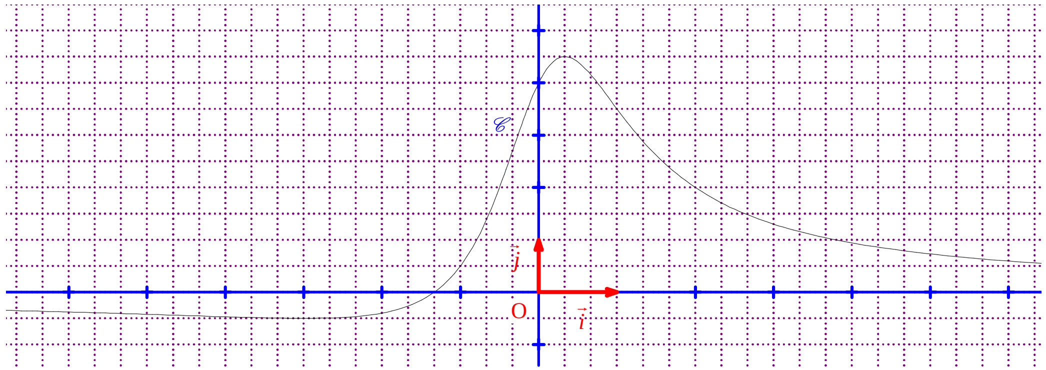
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) On admet que la dérivée de f est donnée par $f'(x)=\dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$.

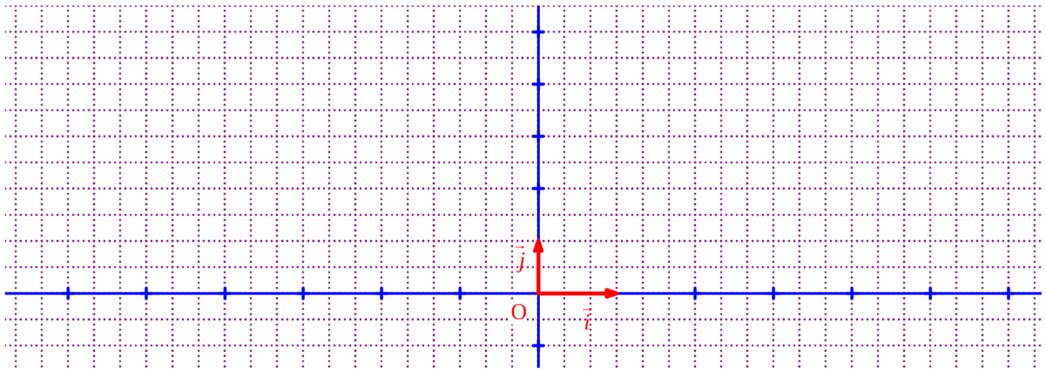
Compléter la phrase :

f' s'annule en ………………… donc $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………….. .

2°) On donne sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ (ne rien écrire sur ce graphique).



Reproduire la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique suivant en traçant les tangentes horizontales sous la forme de doubles flèches tangentes.
Marquer les points de contact ; faire apparaître leurs coordonnées sur les axes avec les pointillés correspondants.



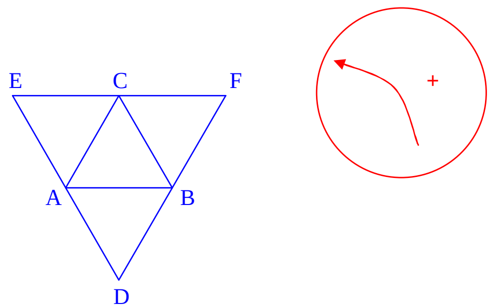
Dans les exercices **VI** et **VII**, on se place dans le plan orienté.

VI. (4 points)

La figure suivante est composée de triangles équilatéraux.
Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)$, $\left(\overrightarrow{AC}\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, $\left(\overrightarrow{FD}\,;\overrightarrow{EC}\right)$.

Il est demandé de ne rien écrire sur cette figure.
On pourra utiliser les trois figures fournies à la fin du sujet.



$\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)=$ .... $\left(\overrightarrow{AC}\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)=$ .... $\left(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{AD}\right)=$ .... $\left(\overrightarrow{FD}\,;\overrightarrow{EC}\right)=$ ....

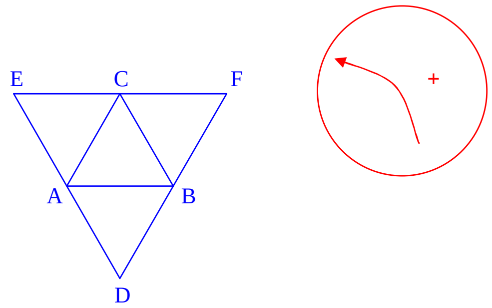
VII.

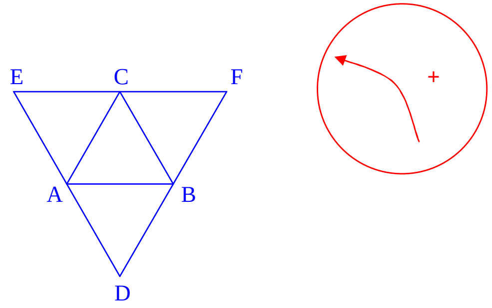
Soit A, B, C trois points tels que $A \neq B$, $A \neq C$, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{119\pi}{4}$.

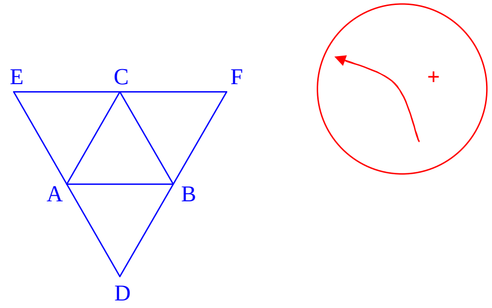
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

Effectuer les calculs au brouillon.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à ....



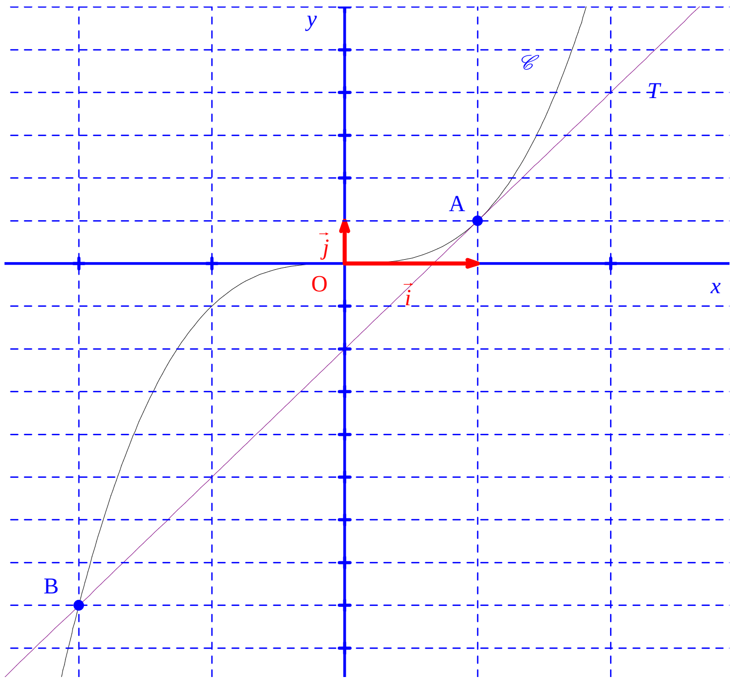




Corrigé du contrôle du 10-1-2014

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.
Un élève devait étudier algébriquement la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
Il a d'abord effectué un graphique sur un logiciel de tracé de courbes (cf. ci-dessous).



Le graphique lui a permis de penser que :

- $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $[-2\,;+\infty[$;
- $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$;
- T recoupe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse – 2.

Il a ensuite élaboré une démarche dont on donne ci-contre les grandes étapes du début :

- calcul de $f'(x) = 3x^2$;
- équation réduite de T : $y = 3x - 2$;
- calcul de la différence $f(x) - (3x-2) = x^3 - 3x + 2$;
- factorisation de cette différence sous la forme $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ grâce à un logiciel de calcul formel.

1°) Plutôt que d'écrire $f(x) - (3x-2)$, l'élève aurait-il pu écrire $f(x) - y$ à la troisième étape de sa démarche ?

Il n'est pas possible d'écrire $f(x) - y$ à la place de $f(x) - (3x-2)$ car la lettre y (qui intervient dans l'équation réduite de T) ne désigne pas une quantité.

2°) Comment l'élève doit-il achever l'étude ? Répondre par une phrase sans effectuer la démarche.

L'élève doit faire un tableau de signes.

II.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+3x}$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Après avoir calculé la dérivée de f (résultat : $f'(x) = -\dfrac{6x+9}{\left(x^2+3x\right)^2}$), un élève a rédigé ainsi la recherche d'une équation de la tangente T au point d'abscisse A d'abscisse – 2.

> T a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1).
>
> Or $x_0 = -2$ d'où $y = -\dfrac{6\times(-2)+9}{\left[(-2)^2+3\times(-2)\right]^2}(x+2) + \dfrac{3}{(-2)^2+3\times(-2)}$ (2)
>
> $y = \dfrac{3}{4}(x+2) - \dfrac{3}{2}$
>
> $y = \dfrac{3}{4}x$

On précise que les calculs sont justes.

1°) Quel commentaire peut-on faire sur la première ligne (égalité (1)) ? Répondre sans calcul.

2°) Quel commentaire peut-on faire sur la deuxième ligne (égalité (2)) ? Répondre sans calcul.

1°)

L'élève n'a pas défini les notations x_0 et y_0.
L'élève aurait dû utiliser les lettres x_{A} et y_{A} ou mieux, il aurait dû écrire la formule en situation avec $f(-2)$ et $f'(-2)$.

2°)

L'élève aurait dû calculer à part $f(-2)$ et $f'(-2)$ pour alléger les calculs (principe de séparation des calculs).

III.

Donner l'expression de deux exemples de fonctions u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant pour fonction dérivée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5$.

$u(x) = x^3 + 5x$ $\qquad\qquad$ $v(x) = x^3 + 5x + 4$

On dit que u et v sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$ (cf. cours de Terminale).

IV.

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont deux réels donnés.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On suppose que $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(1\,;2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. .
Déterminer a et b.

$a = -2$ $\qquad\qquad$ $b = 4$

Corrigé détaillé :

L'énoncé donne deux informations sur la courbe $\mathscr{C}$:

- $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(1\,;2)$; cette information se traduit par $f(1) = 2$ (1).

- la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est horizontale ; cette information se traduit par $f'(1) = 0$ (2).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2ax + b$

(1) équivaut à $a + b = 2$.

(2) équivaut à $2a + b = 0$.

On a donc le système $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=0 \end{cases}$.

On le résout et on trouve : $a = -2$ et $b = 4$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

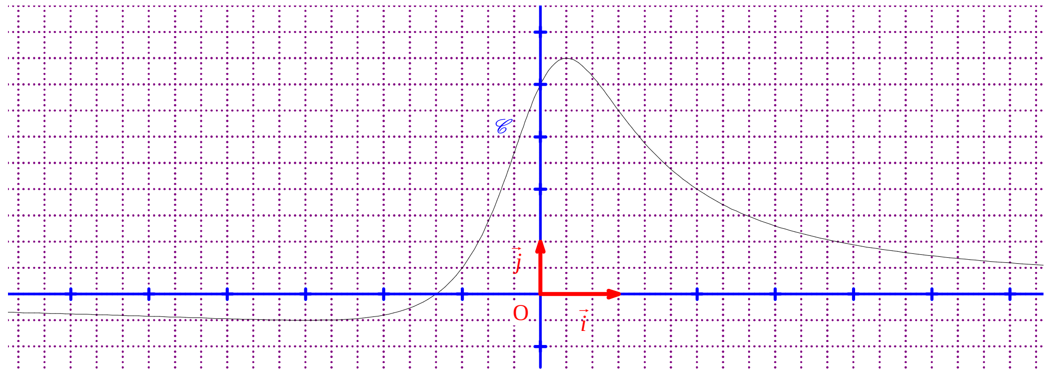
1°) On admet que la dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$.

Compléter la phrase :

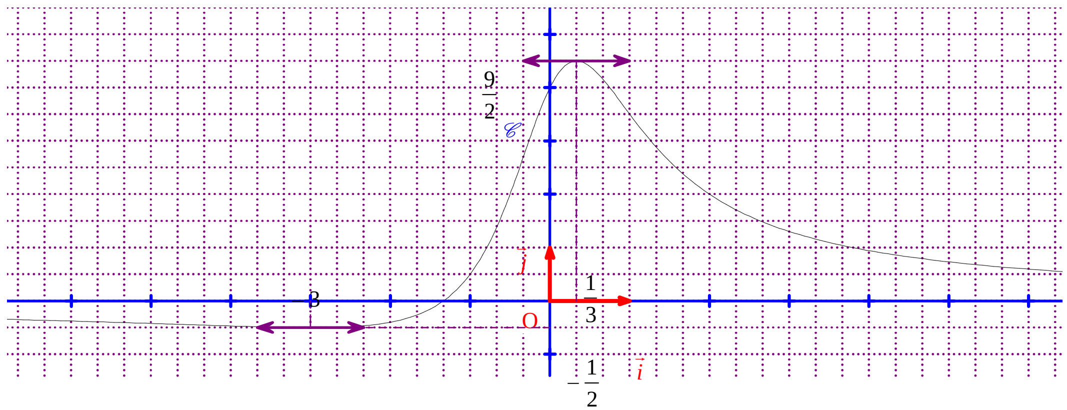
f' s'annule en $\dfrac{1}{3}$ et -3 donc $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\dfrac{1}{3}$ et -3.

On résout pour cela l'équation $-3x^2 - 8x + 3 = 0$ (équation du second degré).
On peut utiliser un programme sur calculatrice.

2°) On donne sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$.



Reproduire le graphique en traçant les tangentes horizontales sous la forme de doubles flèches tangentes.
Marquer les points de contact ; faire apparaître leurs coordonnées sur les axes avec les pointillés correspondants.



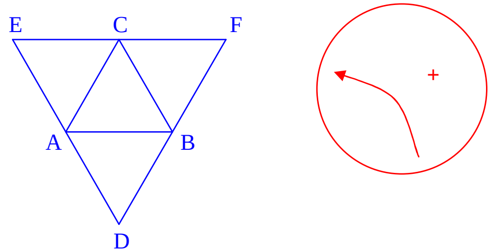
On trace des doubles flèches d'une longueur raisonnable.

Je n'aurais pas dû donner le repère déjà tracé.

Dans les exercices **VI** et **VII**, on se place dans le plan orienté.

VI.

La figure suivante est composée de triangles équilatéraux.
Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés suivants :
$\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)$, $\left(\overrightarrow{AC}\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, $\left(\overrightarrow{FD}\,;\overrightarrow{EC}\right)$.



$\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ ou $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)=\frac{4\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{AC}\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)=0$ ou $\left(\overrightarrow{AC}\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)=2\pi$

$\left(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{FA}\,;\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{3\pi}{2}$

$\left(\overrightarrow{FD}\,;\overrightarrow{EC}\right)=-\frac{\pi}{4}$

VII.

Soit A, B, C trois points tels que $A \neq B$, $A \neq C$, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{119\pi}{4}$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

Effectuer les calculs au brouillon.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à $-\frac{\pi}{4}$.

On peut utiliser le programme sur calculatrice permettant de déterminer la mesure principale d'un angle orienté.