TS3

Interrogation écrite du vendredi 22 janvier 2010 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ……/20

Les traits de fraction doivent être tracés à la règle.

I. (1 point) Compléter directement les deux égalités ci-dessous :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \ldots\ldots\ldots$ car ……………………	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car ……………………

II. (0,5 point) Compléter l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{k=n+1}\dfrac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k}=$ …………………… (n est un entier supérieur ou égal à 1).

III. (1 point) On considère une suite (u_n) dont tous les termes sont strictement positifs. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\ln u_n$. L'affirmation ci-dessous est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

………..

IV. (1,5 points) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

1°) Donner une expression simplifiée de S_n. $S_n=$ ……………………

2°) Compléter : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=$ ……………. car ………………………………… .

V. (6 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0>0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+(u_n)^2}$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>0$.

………....

………...

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Expliquer pourquoi la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est convergente car ………………………………………………………………………………….

4°) On note l la limite de (u_n). Démontrer soigneusement que $l = \frac{l}{1+l^2}$; en déduire la valeur de l.

……

……

……

……

……

……

……

……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Bonus

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n ; en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

………

………