

Devoir d'approfondissement

I. Soit a et b deux nombres complexes.

Démontrer que l'on a : $\left| \frac{a-b}{1-ab} \right| = 1 \Rightarrow (|a|=1 \text{ ou } |b|=1)$.

Étudier la réciproque.

II.

1°) Soit a un nombre réel.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x = \sqrt{x} + a$.

2°) Étudier la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n .

3°) Étudier la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n} - \frac{3}{16}$ pour tout entier naturel n .

III.

On note (u_n) et (v_n) les suites définies par leurs premiers termes $u_0 = a$ et $v_0 = b$ ainsi que pour les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ pour tout entier naturel n .

1°) Étudier la suite $(v_n - u_n)$.

2°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3°) Étudier la suite $(u_n + v_n)$; en déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

IV.

1°) Écrire une « fonction » sous forme d'un algorithme qui, à tout entier naturel n , fait correspondre la somme de ses chiffres en base dix.

Exemple :

$$1283 \mapsto 1+2+8+3 (=14)$$

2°) Écrire une « fonction » sous forme d'un algorithme qui, à tout entier naturel n , fait correspondre le nombre écrit en inversant l'ordre de ses chiffres.

Exemple :

$$1283 \mapsto 3821$$