Devoir d'approfondissement

I. L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} \leqslant x \leqslant \frac{2\sin x+\tan x}{3}.$$

Dans tout l'exercice, on pose $\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

1°) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3\sin x}{2+\cos x}-x$.

a) Démontrer que le signe de $f\,'$ sur l'intervalle I est le même que celui de $-\cos^2 x+2\cos x-1$.

b) En déduire le sens de variation de f sur I, puis son signe.

2°) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{2\sin x+\tan x}{3}-x$.

a) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a : $g'(x)=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{3}\times\frac{1}{\cos^2 x}$.

b) En déduire le sens de variation de g sur I.

3°) Conclure.

4°) En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{6}$ et l'encadrement précédent, déterminer un encadrement de $\frac{\pi}{6}$ puis de π.

II. On considère la fonction $f : x \mapsto 4\cos^2 x-3\sin x\cos x+5\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Linéariser $f(x)$ en montrant que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x$.

2°) On note α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

a) Calculer $\cos\alpha$.

b) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x+\alpha)$.

c) En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3°) a) Déterminer la fonction $f\,'$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f\,'(x)=0$ et exprimer les solutions en fonction de α.

Corrigé

I.

1°) a)

$$f'(x)=\frac{3\cos x\times(2+\cos x)-3\sin x\times(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}-1$$

$$=\frac{6\cos x+3\cos^2 x+3\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}-1$$

$$=\frac{6\cos x+3\cos^2 x+3\sin^2 x-\left(4+4\cos x+\cos^2 x\right)}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x+2\cos^2 x+3\sin^2 x-4}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x+2\cos^2 x+3\left(1-\cos^2 x\right)-4}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x-\cos^2 x-1}{(2+\cos x)^2}$$

Le dénominateur est toujours strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est le même que $-\cos^2 x+2\cos x-1$.

b)

$-\cos^2 x+2\cos x-1=-(\cos x-1)^2$

Donc $\forall\, x\in \mathrm{I}\quad f'(x)\leqslant 0$.

On en déduit que f est décroissante sur I.

Or $f(0)=0$

Donc $\forall\, x\in \mathrm{I}\quad f(x)\leqslant 0$.