$1^{\text{ère}}$ S1 **Devoir pour le vendredi 10 janvier 2014**

Une méthode de Blaise Pascal

Soit *n* est un entier naturel non nul fixé.

1°) On pose $\boldsymbol{S = 1 + 2 + \ldots + n}$. On peut aussi écrire $S = \sum_{k=1}^{k=n} k$.

On se propose de trouver une formule sommatoire pour calculer la somme *S*, en utilisant une méthode employée par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654.

Il partait de l'égalité :

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Il écrivait les *n* égalités obtenues pour *k* prenant toutes les valeurs entières de 1 à *n*, les unes en dessous des autres, comme dans le cadre ci-dessous :

Pour $k = 1$	$2^2 = 1^2 + 2\times1+1$
Pour $k = 2$	$3^2 = 2^2 + 2\times2+1$
	....
Pour $k = n$	$(n+1)^2 = n^2 + 2\times n+1$

Il ajoutait ensuite membre à membre ces *n* égalités, en observant des simplifications entre deux lignes successives :

$$n \text{ égalités } \left\{ \begin{array}{l} \cancel{2^2} = 1^2 + 2\times1+1 \\ \cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2\times2+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2\times n+1 \end{array} \right.$$

Il obtenait alors :

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2\times S + n \quad (1).$$

Recopier le dernier cadre en barrant les termes qui s'annulent.
Écrire sans expliquer l'égalité obtenue puis transformer cette égalité pour aboutir à l'égalité (1).
En déduire la formule sommatoire : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

Application : Calculer $A = 1+2+3+\ldots+100$.

2°) On pose $\boldsymbol{S' = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$. On peut aussi écrire $S' = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

En utilisant la méthode de Pascal, mais en partant de l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, démontrer que $S' = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Présenter les calculs dans un cadre comme au 1°), en écrivant les différentes égalités pour *k* prenant toutes les valeurs entières entre 1 et *n* et en barrant les termes qui se simplifient en diagonale.
Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

Application : Calculer $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$.

3°) **Facultatif :**

Calculer $S'' = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en utilisant la méthode de Pascal, mais en partant du développement de $(k+1)^4$.

En déduire que $S'' = S^2$.

Corrigé du devoir du 10-1-2014

1°)

$$\cancel{2^2} = 1^2 + 2\times1+1$$
$$\cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2\times2+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2\times n+1$$

En additionnant membre à membre toutes les égalités, on remarque que des termes se simplifient.
Le 2^2 de la première ligne se simplifie avec le 2^2 de la deuxième ligne.
Le 3^2 de la deuxième ligne se simplifie avec le 3^2 de la troisième ligne.

Dans le membre de gauche, il reste $(n+1)^2$ qui ne se simplifie pas car il est dans la dernière égalité (il n'y a pas d'égalité ensuite).
Dans le membre de droite, il reste 1^2 et d'autres termes.
En regroupant les termes qui ont la même fonction dans chaque égalité, on obtient :

$$(n+1)^2 = 1^2 + (2\times1+2\times2+\ldots+2\times n) + \left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}}\right)$$

On peut aussi écrire directement l'égalité suivante en utilisant le symbole Σ :

$$\boxed{(n+1)^2 = 1^2 + 2\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right) + n}$$

soit

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2\times S + 1\times n$$

soit

$$n^2 + 2n + \cancel{1} = \cancel{1} + 2\times S + n$$

Donc

$$n^2 + n = 2\times S$$

Soit

$$S = \frac{n^2+n}{2}$$

D'où finalement :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On obtient une formule sommatoire.

Application :

Calculons : $\mathrm{A} = 1+2+\ldots+100$.

$\mathrm{A} = 1+2+\ldots+100$

$= \dfrac{100\times(100+1)}{2}$ (on applique la formule sommatoire établie précédemment en prenant $n = 100$)

$= \dfrac{100\times101}{2}$

$= 5050$

Cette exemple montre que l'utilité de la formule que l'on a établi.

2°)

n égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{2^3} = 1^3 + 3\times1^2 + 3\times1+1 \\ \cancel{3^3} = \cancel{2^3} + 3\times2^2 + 3\times2+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^3 = \cancel{n^3} + 3\times n^2 + 3\times n+1 \end{array}\right.$$

On obtient :

$$(n+1)^3 = 1^3 + (3\times1^2+3\times2^2+\ldots+3\times n^2) + (3\times1+3\times2+\ldots+3\times n) + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$$

On peut aussi écrire l'égalité suivante :

$$\boxed{(n+1)^3 = 1^3 + 3\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right) + 3\times\left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2\right) + n}$$

soit

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\,S' + 3\,S + n$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,S' + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^3 = 3\,S' + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = 3\,S'$$

$$3\,S' = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2}$$

$$6\,S' = (n+1)\left[2(n+1)^2 - 3n - 2\right]$$

$$6\,S' = (n+1)\left[2(n^2+2n+1) - 3n - 2\right]$$

$$6\,S' = (n+1)(2n^2+n)$$

$$6\,S' = (n+1)n(2n+1)$$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

3°)

Pour $k = 1$	$2^4 = 1^4 + 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$
Pour $k = 2$	$3^4 = 2^4 + 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$
	…………………
Pour $k = n$	$(n+1)^4 = n^4 + 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1$

En additionnant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\times\sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 6\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\times\sum_{k=1}^{k=n} k + n$$

Cette égalité donne successivement les égalités :

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\,S'' + 6 \times S' + 4 \times S + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = 1^4 + 4\,S'' + 2n\,(n+1)(2n+1) + 2n\,(n+1) + n$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\,S''$$

$$S'' = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$S'' = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$$

$$S'' = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S'' = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Donc $\boldsymbol{S'' = S^2}$.

Complément :

Il est intéressant de consulter le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal accessible en ligne sur Internet dans sa version imprimée originale rédigée en français du XVII^e siècle.
On y voit notamment des expressions mathématiques anciennes, à une époque où le langage mathématique était moins développé qu'aujourd'hui. Par exemple, Pascal pour parler d'une expression à la puissance 4 emploie l'expression « quarré-quarré ».