TS1

Contrôle du jeudi 9-1-2014
(50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………………… **Note :** …….. **/ 20**

Dans les exercices I, II, III et V, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Aucune figure n'est demandée.

I. On note A le point du plan d'affixe $2+\text{i}$.
Déterminer les ensembles $E=\left\{\text{M}(z)\in P \,/\, |\,2+\text{i}-z\,|=|\,\overline{z}\,|\right\}$ et $F=\left\{\text{M}(z)\in P \,/\, |\,2-\text{i}-\overline{z}\,|=3\right\}$.

II. Soit A, B, C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives *a*, *b*, *c* telles que
$|\,b-a\,|^2+|\,c-b\,|^2=|\,a-c\,|^2 \quad (1)$. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier brièvement.

III. À tout point M du plan *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z'=\text{e}^{|z|}\times z$.
Les deux questions sont indépendantes.
1°) Démontrer que, lorsque $z\neq 0$, les points O, M, M' sont alignés dans cet ordre.
2°) Soit Γ un cercle de centre O et de rayon $R>0$. Démontrer que si $\text{M}\in\Gamma$, alors $\text{M}'\in\Gamma'$ où Γ' est un cercle dont on donnera le centre et le rayon R' en fonction de *R*.

IV. Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($U = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$).

1°) On pose $z_1 = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \dfrac{2+i}{3}$, $z_4 = -i$. Compléter par $\in$ ou $\notin$.

z_1 ....U	z_2 ....U
z_3 ....U	z_4 ....U

2°) Démontrer que U est stable par produit c'est-à-dire que le produit de deux éléments quelconques de U est encore dans U.
On commencera la démonstration ainsi : « Soit z et z' deux éléments quelconques de U. Démontrons que … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Pour la question 2°), on pourra utiliser $j^3 = 1$ (démonstration aisée par calcul).

Soit t un nombre complexe non nul. On note A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives t, jt, j^2t.

1°) Démontrer que A, B, C sont tous situés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont on définira le rayon.

2°) Démontrer que ABC est équilatéral (on pourra commencer par démontrer que $\text{AB} = |j-1| \times |t|$).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. Soit P un plan de l'espace, A un point quelconque de P et Δ la perpendiculaire à P passant par A.
On considère un point B quelconque de Δ, distinct de A, et une droite D incluse dans P ne passant pas par A.
On note C le projeté orthogonal de A sur D. Démontrer que (BC) est orthogonale à D.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Barème	I : 4	II : 1	III : 4	IV : 3	V : 4	VI : 4

Corrigé du contrôle du 9-1-2014

I. Recherche d'ensembles de points

$A(2+i)$

• $E=\left\{M(z)\in P\,/\,|2+i-z|=|\bar{z}|\right\}$

Soit M un point quelconque du plan *P*, d'affixe *z*.

$$\begin{aligned} M\in E &\Leftrightarrow |2+i-z|=|\bar{z}| \\ &\Leftrightarrow |2+i-z|=|z| \\ &\Leftrightarrow |z_A-z|=|z-z_O| \\ &\Leftrightarrow MA=OM \\ &\Leftrightarrow MA=MO \end{aligned}$$

E est la médiatrice de [OA].

• $F=\left\{M(z)\in P\,/\,|2-i-\bar{z}|=3\right\}$

Soit M un point quelconque du plan *P*, d'affixe *z*.

$$\begin{aligned} M\in F &\Leftrightarrow |2-i-\bar{z}|=3 \\ &\Leftrightarrow |\overline{2+i-z}|=3 \\ &\Leftrightarrow |2+i-z|=3 \\ &\Leftrightarrow |z_A-z|=3 \\ &\Leftrightarrow MA=3 \\ &\Leftrightarrow AM=3 \end{aligned}$$

F est le cercle de centre A et de rayon 3.

Quelques commentaires :

→ La rédaction de ce type d'exercice doit apprise par cœur, mot pour mot.

> Soit M un point quelconque du plan, d'affixe *z*.
>
> $$\begin{aligned} M\in E &\Leftrightarrow |2+i-z|=|\bar{z}| \\ &\Leftrightarrow |2+i-z|=|z| \\ &\Leftrightarrow |z_A-z|=|z-z_O| \\ &\Leftrightarrow MA=OM \\ &\Leftrightarrow MA=MO \end{aligned}$$

On ne parle pas du point M dans la conclusion.
Le mot « point » n'apparaît pas dans la conclusion.
On répond de manière très concise ; on évite les formulations longues du type « L'ensemble *E* est l'ensemble constitué de tous les points de la médiatrice de [OA] ».

→ Du point de vue de la méthode, on doit aboutir par équivalence à une égalité de distances (donc avec le point M).
On évite de poser $z=x+iy$ avec *x* et *y* réels.

II. Soit A, B, C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives *a*, *b*, *c* telles que $|b-a|^2+|c-b|^2=|a-c|^2$ (1). Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier brièvement.

(1) $\Leftrightarrow AB^2+BC^2=CA^2$

$\Leftrightarrow AB^2+BC^2=AC^2$ (car $CA=AC$)

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

III. À tout point M du plan *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z'=e^{|z|}\times z$.
Les deux questions sont indépendantes.
1°) Démontrer que, lorsque $z\neq 0$, les points O, M, M' sont alignés dans cet ordre.
2°) Soit Γ un cercle de centre O et de rayon $R>0$. Démontrer que si M ∈ Γ, alors M' ∈ Γ' où Γ' est un cercle dont on donnera le centre et le rayon R' en fonction de *R*.

1°)

$z_{\overrightarrow{OM}}=z_M=z$

$z_{\overrightarrow{OM'}}=z_{M'}=z'=e^{|z|}\times z$

On a donc : $z_{\overrightarrow{OM'}}=e^{|z|}z_{\overrightarrow{OM}}$

Par conséquent, $\overrightarrow{OM'}=e^{|z|}\overrightarrow{OM}$.

Comme $z\neq 0$ par hypothèse, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont tous les deux non nuls.

De plus, $|z|>0$ d'où $e^{|z|}>1$ donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires de même sens et $OM'>OM$ (la norme du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est plus grande que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

On en déduit que les points O, M, M' sont alignés dans cet ordre.

2°)

Soit M un point quelconque de Γ.

$M\in\Gamma$ donc $OM=R$ d'où $|z|=R$.

On a alors : $z'=e^{R}\times z$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\text{OM}' &= |z'| \\ &= |e^R \times z| \\ &= |e^R| \times |z|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|e^R| &= \text{module de } e^R \\ &= \text{valeur absolue de } e^R \text{ car } e^R \text{ est un réel} \\ &= e^R \text{ car } e^R > 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{OM}' = e^R \times R$.

On en déduit que M' appartient au cercle Γ' de centre O et de rayon $R' = Re^R$.

Dans cette question, on reste en mode déductif. À aucun moment, on n'utilise d'équivalences.

IV. Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($U = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$).

1°) On pose $z_1 = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \dfrac{2+i}{3}$, $z_4 = -i$. Compléter par $\in$ ou $\notin$.

z_1 ....U	z_2 ....U
z_3 ....U	z_4 ....U

2°) Démontrer que U est stable par produit.
On commencera la démonstration ainsi : « Soit z et z' deux éléments quelconques de U. Démontrons que … ».

1°) On calcule le module de chaque nombre complexe ; on vérifie à la calculatrice.

$z_1 \in U$ $\quad$ $z_2 \in U$

$z_3 \notin U$ $\quad$ $z_4 \in U$

2°) Il s'agit de démontrer que le produit de deux éléments quelconques de U est encore dans U.

Soit z et z' deux éléments quelconques de U.

Démontrons que $zz' \in U$.

$|zz'| = |z| \times |z'|$

Or $(z, z') \in U^2$ d'où . $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.

Donc $|zz'| = 1 \times 1 = 1$

Par suite, $zz' \in U$.

On en déduit que U est stable par produit.

V. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On admet le résultat suivant que l'on peut aisément démontrer par calcul : $j^3 = 1$.

Soit t un nombre complexe non nul. On note A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives t, jt, j^2t.

1°) Démontrer que A, B, C sont tous situés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont on définira le rayon.

2°) Démontrer que ABC est équilatéral (on pourra commencer par démontrer que $\text{AB} = |j-1| \times |t|$).

- Attention, l'égalité $j^3 = 1$ est propre aux complexes.
Dans l'ensemble des nombres réels, le seul nombre dont le cube vaut 1 est 1.
On dit que j est une racine cubique complexe de 1.

- On remarquera que l'expression de j ne sert dans la résolution de l'exercice.

Résultat préliminaire :

$|j| = \left| -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ (on peut aussi remarquer que j est égal au z_2 de l'exercice précédent, dont on a démontré qu'il appartient à l'ensemble U des nombres complexes de module 1).

$z_A = t$ $\qquad$ $z_B = jt$ $\qquad$ $z_C = j^2t$

1°)

$\text{OA} = |t|$

$\text{OB} = |jt| = |j| \times |t| = 1 \times |t| = |t|$

$\text{OC} = |j^2t| = |j^2| \times |t| = |j|^2 \times |t| = 1 \times |t| = |t|$

On a donc $\text{OA} = \text{OB} = \text{OC} = |t|$.

Or $t \neq 0$ par hypothèse donc $|t| \neq 0$ (ou même $|t| > 0$).

Par suite, A, B, C sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $|t|$.

2°)

$\text{AB} = |z_B - z_A| = |jt - t| = |(j-1)t| = |j-1| \times |t|$

$\text{BC} = |z_C - z_B| = |j^2t - jt| = |(j^2 - j)t| = |j-1| \times |j| \times |t| = |j-1| \times |t|$

$\text{CA} = |z_A - z_C| = |t - j^2t| = |j^3t - j^2t| = |(j^3 - j^2)t| = |j-1| \times |j^2| \times |t| = |j-1| \times |t|$

On a donc $\text{AB} = \text{BC} = \text{CA}$.
Par suite, ABC est équilatéral.

Variante pour le calcul de CA *:*

$$\text{CA} = \left| z_{\text{A}} - z_{\text{C}} \right| = \left| t - j^2 t \right| = \left| \left(1 - j^2\right) t \right| = \left| 1 - j \right| \times \left| 1 + j \right| \times \left| t \right|$$

Or $\left| 1 + j \right| = \left| \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$.

D'où $\text{CA} = \left| j - 1 \right| \times \left| t \right|$.

On peut éventuellement calculer $\left| j - 1 \right|$ mais cela ne sert pas vraiment.

VI. Soit *P* un plan de l'espace, A un point quelconque de *P* et Δ la perpendiculaire à *P* passant par A.
On considère un point B quelconque de Δ, distinct de A, et une droite *D* incluse dans *P* ne passant pas par A.
On note C le projeté orthogonal de A sur *D*. Démontrer que (BC) est orthogonale à *D*.

On réalise une figure au brouillon.

On a : $\Delta \perp P$ et $D \subset P$.

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan (p).

Donc $\Delta \perp D$.

De plus, C étant le projeté orthogonal de A sur *D*, on a (AC) $\perp$ *D*.

Comme les points A et B appartiennent à *D*, $\Delta \subset$ (ABC).

De manière évidente, (AC) $\subset$ (ABC).

De plus, (AB) et (AC) sont sécantes.
Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.
D'où *D* $\perp$ (ABC).

D'autre part, (BC) $\subset$ (ABC).

Donc d'après la propriété (p), on a : (BC) $\perp$ *D*.